



Wie funktioniert eigentlich GPS? – ein computergestützter Modellierungsworkshop

7

Martin Frank, Pascal Richter, Christina Roeckerath und Sarah Schönbrodt

Zusammenfassung

GPS ist ein globales Satellitennavigationssystem zur Positionsbestimmung, bei dem vielfältige mathematischen Methoden angewandt werden. Genutzt wird es fast alltäglich: Sei es beim Pokémon Go-Spielen, im Straßenverkehr oder um die nächste Haltestelle samt Busverbindung zu finden. Die Fragestellung, wie die GPS-Positionsbestimmung funktioniert, dürfte also für Schülerinnen und Schüler aufgrund dieses starken Lebensweltbezugs relevant sein. Weiter handelt es sich um eine realistische Problemstellung, die die Anwendung von Mathematik erfordert und somit authentisch ist. Ihre Behandlung bemüht von Pythagoras über Gleichungssysteme bis hin zu Winkelfunktionen einiges an Schulmathematik. Im vorliegenden Artikel werden die mathematischen Hintergründe der Positionsbestimmung mittels GPS und eine konkrete didaktisch-methodische Umsetzung im Rahmen eines computergestützten Workshops für Schülerinnen und Schüler der Oberstufe vorgestellt. Die Schülerinnen und Schüler arbeiten mit echten vor Ort aufgenommenen Satellitendaten und erleben sehr anschaulich, wie sich ein Modell immer weiter verbessert. Die Modellverbesserung wird sichtbar, indem sich die ermittelte Position auf einer Karte immer weiter der tatsächlichen Position der Datenaufnahme annähert. Zur Beschreibung dieses Modellbildungsprozesses wird das Bild einer computergestützten Modellierungsspirale verwendet, was die Annäherung an eine optimale Lösung durch Wiederholung der Modellierungsschritte betont. Die Workshop-Materialien (Arbeitsblätter, MATLAB-Skripte) sind zum Download verfügbar.

M. Frank (✉)

Steinbuch Centre for Computing, Karlsruher Institut für Technologie
Eggenstein-Leopoldshafen, Deutschland

P. Richter · C. Roeckerath · S. Schönbrodt
RWTH Aachen
Aachen, Deutschland

7.1 GPS als relevantes und authentisches mathematisches Modell

Mathematik hat eine enorme Relevanz für unser alltägliches Leben, sowie für Wissenschaft, Industrie und Wirtschaft. Mathematische Fragestellungen zur Funktionsweise populärer Anwendungen, wie Suchmaschinen, Musikerkennungsprogrammen oder Audio-kompressionsverfahren, haben das Potential Schülerinnen und Schülern diese Relevanz zu vermitteln. Es handelt es sich um realistische Problemstellungen, die nur mit Hilfe mathematischer Methoden gelöst werden können, und einen hohen Lebensweltbezug für Schülerinnen und Schüler haben. Somit erfüllen sie sowohl das Kriterium der Authentizität als auch das Kriterium der (Schüler-)Relevanz für Modellierungsaufgaben (vgl. Maaß 2010; Eichler 2015). Viele Beispiele dieser Art wurden in der ISTRON-Schriftenreihe vorgestellt (vgl. Haubrock 2000). Das Satellitennavigationssystem GPS ist eine solche Anwendung und spielt in der Alltagswelt der Schülerinnen und Schüler ebenfalls eine bedeutende Rolle. Sie aktivieren es im Smartphone zur Navigation, beim Nutzen der neusten Fitness-App oder um die Abfahrtszeiten der fußläufig erreichbaren Bushaltestellen zu erhalten. Einige verbringen vielleicht auch ihre Freizeit mit Geocaching. Aber wie bestimmt ein GPS-Gerät die eigene Position auf der Erde? Somit dürfte auch diese Fragestellung gemäß Maaß (2010) eine aus Schülersicht relevante und authentische Modellierungsaufgabe sein.

Im Folgenden wird vielfach erprobtes und detailliert ausgearbeitetes Unterrichtsmaterial vorgestellt, welches regelmäßig im Rahmen von eintägigen Workshops mit Schülergruppen der Oberstufe behandelt wird. Die Materialien führen durch einen Modellierungsprozess, bei dem der Computereinsatz (vgl. Greefrath 2011) und die Annäherung an eine gute Lösung durch iterative Verfeinerung des Modells (vgl. Haines et al. 2001) eine entscheidende Rolle spielen. Sie wurden am Lehr-Lern-Labor CAMMP¹ für mathematische Modellierung der RWTH Aachen entwickelt. Alle im Rahmen von CAMMP behandelten Problemstellungen sind in dem Sinne authentisch, als dass es sich stets um reale (also nicht ausgedachte) Problemstellungen aus Alltag, Industrie und Wissenschaft handelt, für deren Lösung der Einsatz von Mathematik und Computer unerlässlich ist. Weiter wird besonderer Wert daraufgelegt, dass die Lösung der Problemstellungen Relevanz für die Schülerinnen und Schüler selbst oder die Gesellschaft hat.

Auch das interdisziplinäre Arbeiten bei der Entwicklung eines Modells zur Positionsbestimmung unterstreicht die Authentizität der Problemstellung. So müssen die Schülerinnen und Schüler im Verlauf des Modellierungsprozesses u. a. physikalische Überlegungen, wie bspw. relativistische Effekte berücksichtigen, und den Computer als Werkzeug zur Realisierung aufwendiger mathematischer Berechnungen einsetzen. Diese so erfahrene Interdisziplinarität durch Verknüpfung von Mathematik, Informatik und Physik spiegelt aus unserer Sicht ein realistisches Bild der Arbeitsweise beim modernen Problemlösen durch mathematische Modellierung wider. Ein Blick über den rein mathematischen Tellerrand hinaus ist meist unumgänglich, um reale Probleme in ihrer Gänze zu erfassen.

¹ Computational and Mathematical Modeling Program, www.cammp.rwth-aachen.de.

Es gibt (vor allem in der englischsprachigen Literatur) vielzählige Quellen, welche die Mathematik hinter GPS erläutern. Unsere Darstellung basiert hauptsächlich auf Strang und Borre (2012) und den dort genannten weiterführenden Referenzen. Auch in den ISTRON-Bänden sind einzelne Aspekte der Funktionsweise von GPS beleuchtet worden (vgl. Haubrock 2000; Schiller 2011; Meyer 2014). Es gibt weitere, mit Schulmathematik zugängliche Aspekte von GPS, die an dieser Stelle nicht behandelt werden. Dazu zählt insbesondere die Codierung der Satellitensignale, die an anderer Stelle (vgl. Meyer 2014) schon beschrieben wurden. Auch Differential-GPS, sowie die Benutzung des Kalman-Filters sind nicht Gegenstand dieses Artikels. Einzelne Abschnitte sind den Abschlussarbeiten (Schönbrodt 2015; Wiener 2015) entnommen. Für den Unterrichtseinsatz aufgearbeitete Fragestellungen, welche die Anwendung der Positionsbestimmung mit GPS beinhalten, wurden von Greefrath und Riemer (2013) vorgestellt.

7.2 Die computergestützte Modellierungsspirale

Mit dem im Folgenden beschriebenen Material erleben Schülerinnen und Schüler sehr anschaulich, wie sich ein Modell im Laufe des Modellbildungsprozesses immer weiter verbessert. In insgesamt fünf Durchläufen durch den Modellierungskreislauf nähert sich Schritt für Schritt der mathematisch bestimmte Ort dem tatsächlichen Ort der Schülerinnen und Schüler an. Zur Veranschaulichung für die Schülerinnen und Schüler ist die von der Initiative Computer-Based Math² eingeführte Solution Helix of Math ein schönes Bild, die sich in ähnlicher Form auch bei Büchter und Leuders (2005) wiederfindet. Sie erweitert das in der gängigen didaktischen Diskussion bekannte Bild des Modellierungskreislaufs (vgl. z. B. Blum und Leiss 2007) um den Aspekt der Annäherung an eine optimale Lösung durch Wiederholung der Modellierungsschritte. Die Modellierungsschritte der Solution Helix of Math entsprechen, abgesehen von der Betonung des Computereinsatzes, im Wesentlichen denen des frühen Modellierungskreislaufs von Blum (1985). Dieser beschränkt sich entgegen späterer Versionen (vgl. Blum und Leiss 2007) noch auf vier Schritte (vgl. Abb. 7.1). Durch die Anpassung an die in der didaktischen Diskussion gängige Terminologie erhalten wir die in Abb. 7.2 dargestellte computergestützte Modellierungsspirale mit den folgenden Schritten:

1. Vereinfachen und Strukturieren der Realität bezüglich der realen Problemstellung bzw. später Präzisierung des realen Modells
2. Mathematisieren des realen Modells
3. Computergestütztes Arbeiten mit dem mathematischen Modell
4. Interpretieren und Validieren der mathematischen Lösung in Bezug auf das reale Problem

² www.computerbasedmath.org.

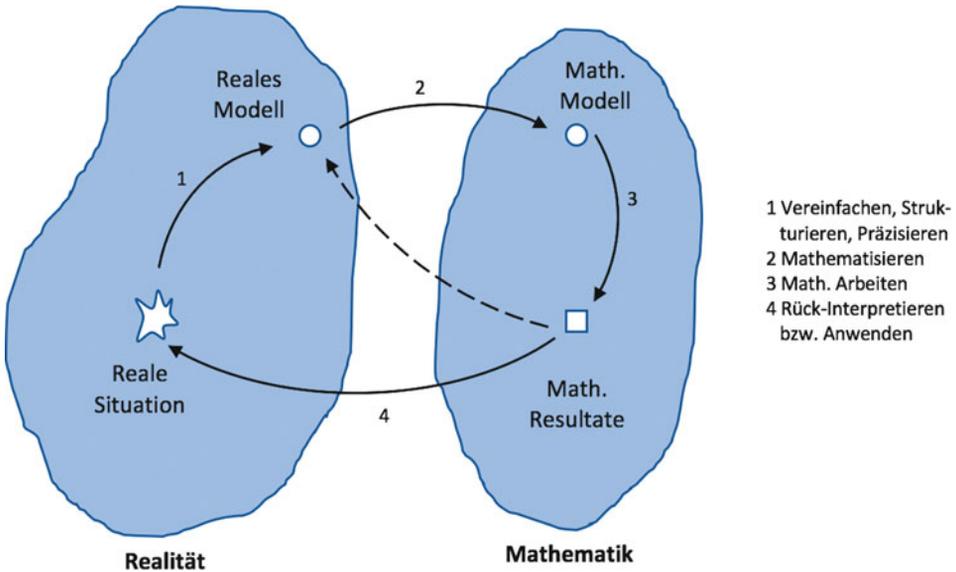


Abb. 7.1 Der Modellierungskreislauf nach Blum. (Blum 1985)

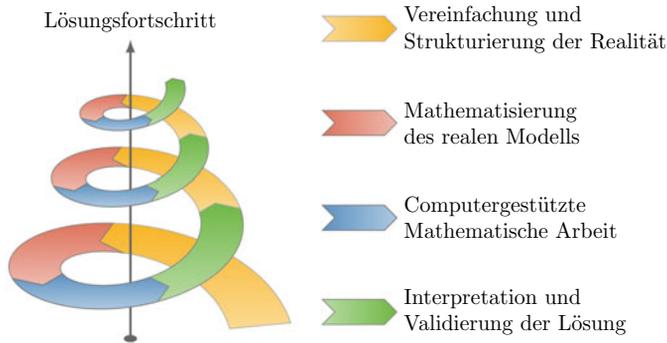


Abb. 7.2 Computergestützte Modellierungsspirale

Da unser Fokus nicht wie bei Blum und Leiss (2007) auf der Untersuchung kognitiver Prozesse beim Modellieren liegt, sondern konkretes Unterrichtsmaterial vorgestellt werden soll, beschränken wir uns auf die angegebenen vier Schritte.

Wie von Greefrath und Siller vorgeschlagen wird bei der computergestützten Modellierungsspirale zur Bearbeitung des mathematischen Modells ein digitales Werkzeug eingesetzt (vgl. Greefrath und Siller 2009; Greefrath 2011). Ziel der Computerunterstützung ist es, dass sich die Schülerinnen und Schüler weniger mit dem mathematischen Arbeiten beschäftigen, sondern sich auf die anderen (kreativeren) Schritte des Modellierungsprozesses konzentrieren können. Durch die Verwendung einer Computersoftware (in unserem Fall MATLAB) wird der Fokus des Lernmoduls somit auf die problemorientierte Bearbeitung

der Aufgaben durch die Schülerinnen und Schüler gelegt und weniger auf die Schulung formaler Fertigkeiten, da kalkülhafte Berechnungen oder Lösungsverfahren für Standardprobleme vom Computer übernommen werden. Damit soll insbesondere die Förderung der prozessbezogenen Kompetenz des Modellierens, aber auch die des Problemlösens in den Mittelpunkt rücken. Dass der Rechenaufwand ohne Computereinsatz bei einem Großteil der Aufgaben, welche die Schülerinnen und Schüler im Rahmen des Lernmoduls bearbeiten, zu zeitaufwendig und damit nicht zu leisten wäre, ist ein weiteres Argument, das den Einsatz des Computers bei diesem Workshop begründet. Besondere Merkmale der im Workshop verwendeten MATLAB-Skripte sind neben der Verwendung eines Lernassistenten, der den Schülerinnen und Schülern Hinweise auf mögliche Fehler bzw. eine Rückmeldung über die Korrektheit ihrer Lösung liefert, auch das Einbinden von Google Maps. Die Annäherung der mathematisch bestimmten Lösung an die tatsächliche Position der Datenaufnahme, die sich durch ein wiederholtes Durchlaufen des Modellierungsprozesses ergibt, wird auf diese Weise auf der digitalen Karte auch geographisch visualisiert.

Der Computereinsatz erlaubt darüber hinaus, dass viele komplexe reale Problemstellungen mit gängiger Schulmathematik bearbeitet werden können, wenn die über den Schulstoff hinausgehenden mathematischen Inhalte vom Computer übernommen werden (vgl. Greefrath und Weitendorf 2013). Dieser Punkt trifft auf die hier vorgestellte Problemstellung zu GPS zu.

7.3 Reale Situation und Problemstellung

Das Global Positioning System ist der Nachfolger des ersten Satellitensystems Transit, welches von 1964 bis 1996 von der US-Marine betrieben wurde. GPS wird seit 1973 vom US Verteidigungsministerium entwickelt und ist seit 1993 in Betrieb. Das System wurde 1995 für voll funktionsfähig erklärt und steht seitdem für militärische und zivile Nutzung zur Verfügung. Für den Betrieb von GPS werden mindestens 24 funktionsfähige Satelliten benötigt, die in einer Höhe von 20.200 km die Erde auf einer leicht ellipsenförmigen Bahn im mittleren Erdorbit umkreisen. Auf sechs verschiedenen Bahnen (alle mit einem Neigungswinkel von 55° bezüglich der Äquatorebene) befinden sich jeweils mindestens vier Satelliten in gleichen Abständen (vgl. Abb. 7.3). Durch diese Anordnung der Satellitenbahnen können von jedem Ort der Erde zu jedem Zeitpunkt mindestens vier Satellitensignale empfangen werden.

Für GPS wird das geozentrische Koordinatensystem ECEF (Earth-Centered, Earth-Fixed) verwendet, welches sich mit der Erde mit dreht (vgl. Abb. 7.4). Der Ursprung dieses Koordinatensystems liegt im Schwerpunkt der Erde und die z -Achse zeigt entlang der mittleren Rotationsachse nach Norden. Die x -Achse wird durch den Äquator und durch den Nullmeridian festgelegt und die y -Achse vervollständigt die beiden Achsen in Höhe des Äquators zu einem Rechtssystem. In diesem Koordinatensystem hat ein auf der Erde ruhender Empfänger zu allen Zeiten dieselben kartesischen Koordinaten.

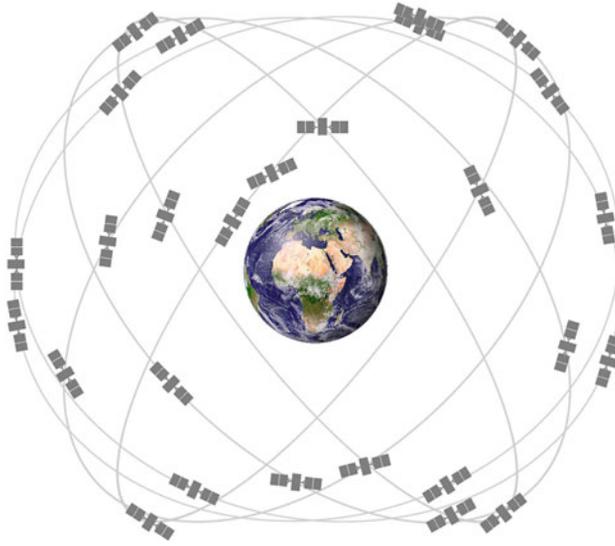


Abb. 7.3 Die sechs Umlaufbahnen der GPS Satelliten (Abstände sind maßstabsgetreu)

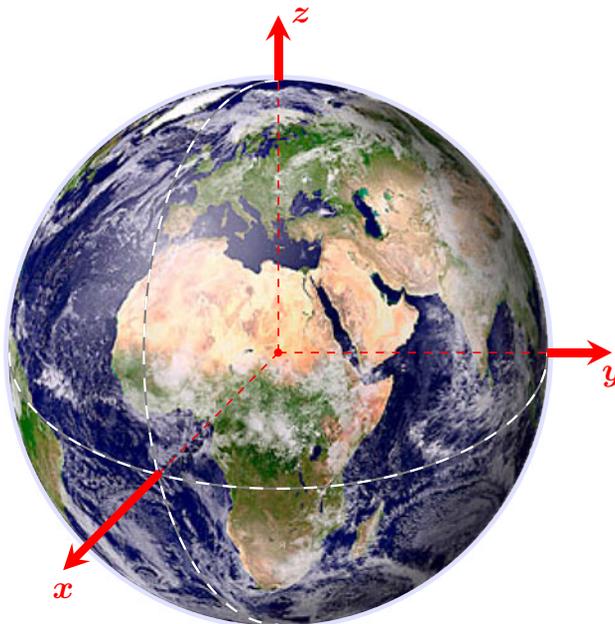


Abb. 7.4 Das ECEF-Koordinatensystem, das für GPS verwendet wird

In jedem GPS Satelliten ist eine Atomuhr vorhanden. Die GPS Satelliten senden jede Millisekunde Nachrichten zur Erde, welche die Sendezeit und weitere Daten zum Orbit enthalten. Der Orbit eines Satelliten wird durch 16 Parameter beschrieben, die alle zwei Stunden von einer Bodenstation aktualisiert werden. Aus verschiedenen Gründen muss die Satellitenzeit auch immer wieder auf die Erdzeit angepasst werden (siehe Abschn. 7.5.1 Modellverbesserungen für weitere Details). Die Zeit und die zeitliche Anpassung werden mittels vierer Parameter beschrieben. Zusammen mit einer Identifikationsnummer eines jeden Satelliten werden somit für jeden Satelliten genau 21 Parameter benötigt, welche als *Ephemeriden* bezeichnet werden. Mittels dieser Ephemeriden lassen sich die Positionen der Satelliten im Weltall bestimmen. In den nachfolgenden Abschnitten werden die einzelnen Schritte vorgestellt, die die Schülerinnen und Schüler bei der Beantwortung der Frage, wie ein GPS-Gerät seine eigene Position auf der Erde bestimmt, durchlaufen. Dabei wird exemplarisch mit den Messwerten gearbeitet³, die am 18. Juli 2013 um 12:11 Uhr in der Nähe des Schülerlabors CAMMP in Aachen aufgenommen wurden. Zu dem Zeitpunkt wurden acht Satellitensignale empfangen.

7.4 Erste Lösung des Problems

In diesem Abschnitt wird eine erste vollständige Runde der Modellierungsspirale durchschritten und somit eine erste, einfache Lösung des Problems hergeleitet. Anhand von Modellverbesserungen werden in den darauffolgenden Abschnitten mit weiteren Runden durch die Modellierungsspirale immer bessere Lösungen erzielt.

Zunächst werden nur die Daten der ersten drei Satelliten im Datensatz verwendet. Es ist zu bemerken, dass die errechneten Positionen sehr stark von den gewählten Satellitendaten abhängen. Die Auswahl der Satelliten wird in Abschn. 7.5.4 genauer thematisiert. Die erhaltene erste Lösung für die Empfängerposition auf der Erde wird schließlich mit der tatsächlichen Lage des Workshoportes abgeglichen.

7.4.1 Vereinfachung und Strukturierung der Realität

Zur Strukturierung der Realität kann das Problem in folgende aufeinander aufbauende Teilprobleme zerlegt werden:

³ Die Messwerte liegen im RINEX Format vor (vgl. Gurtner und Estey 2007). Zur Aufnahme haben wir den GNSS Rohdatenlogger mit NEO-6P-Schnittstelle der Firma OptimalSystem verwendet. Der Vorteil eines solchen Geräts ist, dass dieses den Zugriff auf die Rohdaten ermöglicht, während Handys typischerweise spezialisierte Chips besitzen, die die GPS-Berechnungen durchführen und nur berechnete Koordinaten ausgeben.

- Wie erhält man die Satellitenpositionen?
- Wie lassen sich die sogenannten Pseudoentfernungen des Empfängers zu den Satelliten bestimmen?
- Wie können wir die kartesischen Koordinaten des Empfängers bestimmen?
- Wie können wir daraus die geographischen Koordinaten des Empfängers ableiten, um die berechnete Position auf einer digitalen Landkarte (z. B. Google Maps) zu überprüfen?

Für gewöhnlich werden zu jedem Zeitpunkt auf der Erde die Signale von mindestens vier Satelliten, meist jedoch von sogar acht bis zwölf Satelliten gleichzeitig empfangen. Um zu einem ersten Modell zu gelangen, werden verschiedene Vereinfachungen und Annahmen getroffen. Als erster Modellansatz wird angenommen, dass die Form der Erde einer Kugel entspricht, dass die Empfängeruhr auf der Erde die gleiche Genauigkeit aufweist, wie die Atomuhren in den Satelliten und zudem auch die Satellitenuhr keinen anderen Effekten unterliegt. Ausgehend von der so erhaltenen vereinfachten Situation soll nun die Position (x_E, y_E, z_E) des Empfängers auf der Erde aus drei Satellitensignalen ermittelt werden.

7.4.2 Mathematisierung des realen Modells

Im nächsten Modellierungsschritt müssen die Teilprobleme derart in mathematische Modelle überführt werden, dass sie von einem Computer bearbeitet werden können. Aus allen empfangenen Satellitendaten werden dazu die Daten von genau drei Satelliten ausgewählt. Neben den Ephemeridenvektoren E_{ph_1} , E_{ph_2} und E_{ph_3} , welche die Sendezeiten t_{S_1} , t_{S_2} , und t_{S_3} in Sekunden enthalten, sind außerdem auch die Empfangszeiten t_{E_1} , t_{E_2} , und t_{E_3} in Sekunden auf der Erde bekannt.

Mit Hilfe dieser Daten können wir schrittweise mathematische Modelle für die oben beschriebenen Teilprobleme entwickeln: Zunächst leiten wir Formeln für die *Satellitenkoordinaten* aus den Ephemeridendaten, und die *Pseudoentfernungen* der einzelnen Satelliten aus den Sende- und den Empfangszeiten her. Damit lässt sich ein Gleichungssystem für die Bestimmung der *Empfängerposition* im ECEF Koordinatensystem aufstellen, welche anschließend noch in *geographische Koordinaten* umgeformt wird.

Satellitenposition im ECEF Koordinatensystem

Die Koordinaten des k -ten Satelliten, der die Erde wie in Abschn. 7.3 beschrieben auf einer ellipsenförmigen Bahn in 20.200 km Höhe umkreist, ergibt sich aus der Kepler-Gleichung. Durch die Ephemeriden E_{ph_k} liegen für jeden Satelliten bereits die nötigen Parameter vor, aus denen die ECEF Koordinaten (x_k, y_k, z_k) des k -ten Satelliten durch Anwendung eines mehrschrittigen Algorithmus berechnet werden können. Auf die einzelnen Parameter sowie auf die einzelnen Schritte des Algorithmus wird hier nicht weiter eingegangen, sondern stattdessen auf die Interface Spezifikation IS-GPS-200 (vgl. Dunn

2013) verwiesen. Die Berechnung der Satellitenkoordinaten wird im Workshop ebenfalls dem Computer überlassen.

Pseudoentfernungen der Satelliten zum Empfänger

Neben der Position der Satelliten lässt sich zudem deren Distanz zum Empfänger ermitteln. Eine erste Näherung kann man aus der Laufzeit des Funksignals erhalten. Ausgehend davon, dass sich die Satellitensignale mit Lichtgeschwindigkeit c ausbreiten, lässt sich die Distanz zum Empfänger durch die Zeitdifferenz der Empfangszeiten t_{E_k} und Sendezeiten t_{S_k} bestimmen:

$$d_{S_k} = c(t_{E_k} - t_{S_k}) \quad (7.1)$$

Man beachte, dass bei extrem großen Geschwindigkeiten bereits kleinste Fehler bei der Zeitmessung zu sehr großen Abweichungen der Entfernung führen können. Die Satellitensignale erreichen für gewöhnlich nach bereits etwa 70 bis 90 Millisekunden den Empfänger auf der Erde. Will man die Pseudoentfernung auf etwa 3 m genau bestimmen, so wird sofort klar, dass die Zeitdifferenz dann bis auf 10 Nano-Sekunden genau zu bestimmen ist. Da wir später einzelne Fehlerquellen in das Modell aufnehmen, verwenden wir den Begriff *Pseudoentfernung*.

Im Workshop liegen den Schülerinnen und Schülern die Empfangs- und Sendezeiten der drei ausgewählten Satelliten vor, so dass sie die Übertragungsdauer eines Satellitensignals als Differenz dieser beiden Zeiten eigenständig bestimmen können. Zudem erhalten die Schülerinnen und Schüler sowohl bei einer kurzen Einführung in die Problemstellung des Workshops, als auch auf den Arbeitsmaterialien zu den einzelnen Modellschritten die Information, dass die Signale mit Lichtgeschwindigkeit übertragen werden. Haben die Schülerinnen und Schüler dennoch Schwierigkeiten, die endgültige Formel aus den gegebenen Informationen aufzustellen, so kann als Hilfestellung die Betrachtung der physikalischen Einheiten angeregt werden: Gegeben ist die Zeitdifferenz in Sekunden und die Geschwindigkeit in Metern pro Sekunde. Gesucht wird der Weg, also eine Strecke in Metern. Durch Verrechnen der Einheiten erhalten die Schülerinnen und Schüler die gesuchte Formel.

Empfängerposition im ECEF Koordinatensystem

Mit Kenntnis der Satellitenpositionen und deren Pseudoentfernungen lässt sich ein Gleichungssystem für die Bestimmung der *Empfängerposition* im ECEF Koordinatensystem aufstellen.

Es ist bereits bekannt, dass der Empfänger eine gewisse Distanz d_{S_k} von dem k -ten Satelliten entfernt ist. Stellt man sich um den k -ten Satelliten eine Kugel mit Radius d_{S_k} vor, so befindet sich der Empfänger irgendwo auf der Oberfläche dieser Kugel. Da dies für alle drei Satelliten bzw. Kugeln gilt, muss die Position des Empfängers in einem Schnittpunkt aller drei Kugeln liegen. Da sich zwei Kugeln i. A. in einem Kreis schneiden und dieser Kreis in unserem Fall mit der dritten Kugel genau zwei Schnittpunkte hat, gibt es nur zwei mögliche Empfängerpositionen A und B (vgl. Abb. 7.5). Selbstverständlich gibt es

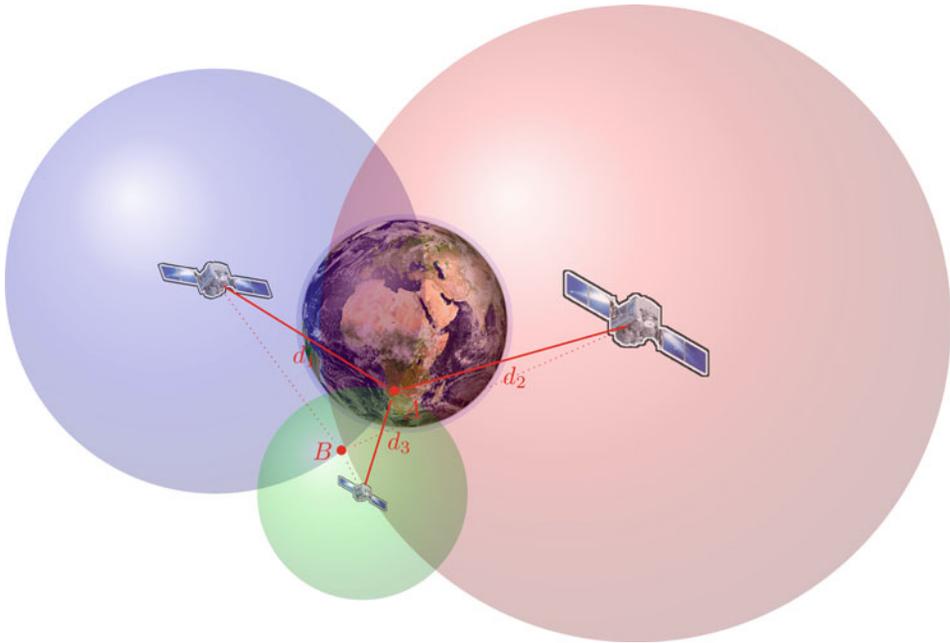


Abb. 7.5 Aufstellen eines Gleichungssystems zur Bestimmung der Empfängerposition

auch pathologische Fälle (kein Schnittpunkt oder weniger Schnittpunkte). Diese kommen in der Praxis jedoch nicht vor. Von diesen beiden Positionen befindet sich eine nahe der Erdoberfläche (A) und die andere weiter von der Erde entfernt im Weltall (B). Für jeden Satelliten k lässt sich eine Gleichung aufstellen, die den Abstand von Empfängerposition und Satellitenposition beschreibt:

$$\sqrt{(x_{S_k} - x_E)^2 + (y_{S_k} - y_E)^2 + (z_{S_k} - z_E)^2} = d_{S_k} \quad (7.2)$$

Insgesamt ergibt sich für die gesuchten Empfängerkoordinaten x_E , y_E und z_E mit Hilfe von allen drei Satelliten das folgende nichtlineare Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} \sqrt{(x_{S_1} - x_E)^2 + (y_{S_1} - y_E)^2 + (z_{S_1} - z_E)^2} &= d_{S_1} \\ \sqrt{(x_{S_2} - x_E)^2 + (y_{S_2} - y_E)^2 + (z_{S_2} - z_E)^2} &= d_{S_2} \\ \sqrt{(x_{S_3} - x_E)^2 + (y_{S_3} - y_E)^2 + (z_{S_3} - z_E)^2} &= d_{S_3} \end{aligned} \quad (7.3)$$

Wie wir gerade gezeigt haben, hat dieses nichtlineare Gleichungssystem im Allgemeinen genau zwei Lösungen. Man kann das System Gl. 7.3 mit Hilfe des Bancroft-Algorithmus (vgl. Bancroft 1985) in eine skalare quadratische Gleichung überführen und explizit lö-

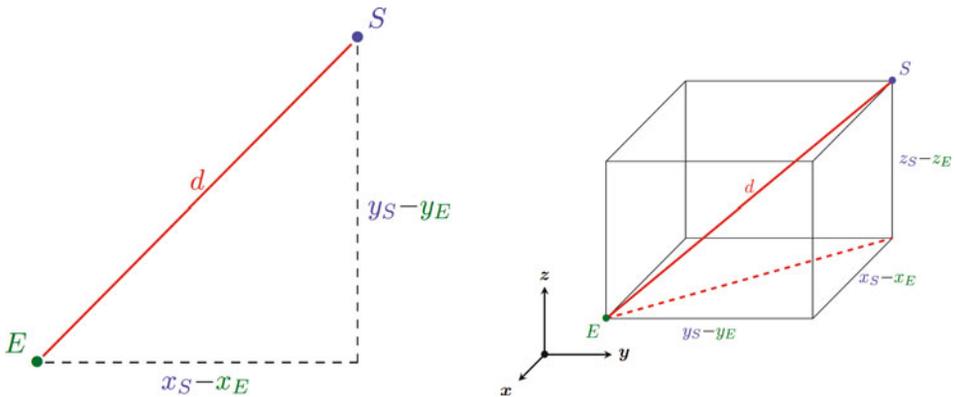


Abb. 7.6 Hilfekarten zur Visualisierung der Problemstellung im zwei- und dreidimensionalen Fall

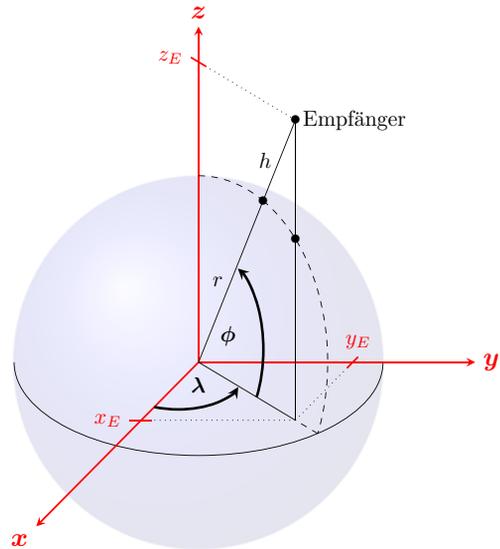
sen. Allgemein bietet sich die Verwendung eines numerischen Lösungsverfahrens an. Unserer Ansicht nach spiegelt dies die allgemeine Vorgehensweise der modernen Mathematik wider: Ein Problem wird analysiert und Existenz, Eindeutigkeit und Eigenschaften der Lösung bewiesen. Zur tatsächlichen Berechnung wird ein numerisches Verfahren verwendet.

Standardverfahren zur numerischen Lösung nichtlinearer Gleichungssysteme mit gleich vielen Gleichungen wie Unbekannten basieren auf dem Newton-Verfahren, welches einen Startpunkt benötigt. Je nach Startpunkt konvergiert das Verfahren gegen eine der beiden Lösungen. Man kann zeigen, dass das Verfahren gegen die erdnähere Lösung A konvergiert, falls als Startpunkt der Erdmittelpunkt $(0,0,0)$ gewählt wird.

Die Gleichungen, die zur Bestimmung der Empfängerkoordinaten aufgestellt werden müssen, sollen von den Schülerinnen und Schülern selbstständig hergeleitet werden. Indem zunächst nur ein Satellit betrachtet wird, lässt sich die Herleitung einer Gleichung durch die Übertragung des bekannten *Satzes des Pythagoras* im zweidimensionalen Fall auf die gegebene dreidimensionale Situation leisten. Als Hilfestellung für Schülerinnen und Schüler, die Schwierigkeiten haben einen Ansatz zur Lösung dieses Modellschrittes zu finden, kommen bei dem Workshop Hilfekarten zum Einsatz, auf denen die Problemstellung zunächst im zweidimensionalen Fall visualisiert und bei weiterem Hilfebedarf auf den dreidimensionalen Fall übertragen wird (vgl. Abb. 7.6).

Neben der Bestimmung der Gleichungen ausgehend vom Satz des Pythagoras, der bereits seit der Mittelstufe geläufig ist, kann auch ein Ansatz über die *Vektorrechnung* gewählt werden. Dazu wird zunächst der Verbindungsvektor zwischen Satellit und Empfänger aufgestellt, der sich aus der Differenz der beiden Ortsvektoren von Ursprung zum Satelliten bzw. zum Empfänger ergibt. Die Länge dieses Verbindungsvektors entspricht der bereits berechneten Pseudoentfernung. Durch Anwendung der bekannten Abstandsformel zur Berechnung des euklidischen Abstandes gelangen die Schülerinnen und Schüler damit ebenfalls zu dem besagten Gleichungssystem. Auch für die Schülerinnen und Schüler die diesen Ansatz wählen steht bei Bedarf eine Hilfekarte zur Verfügung.

Abb. 7.7 Geographische Koordinaten des Empfängers



Umformung in geographische Koordinaten

Auf der Erde werden Positionen in geographischen Koordinaten und nicht in kartesischen Koordinaten angegeben. Somit müssen die Koordinaten (x_E, y_E, z_E) noch in Längen- und Breitengrad ausgedrückt werden⁴.

In diesem ersten Modell wurde angenommen (wie in den Modellvereinfachungen Abschn. 7.4.1 beschrieben), dass die Erde eine perfekte Kugel ist, deren Radius durch den Äquatorradius r gegeben ist. Die geographische Höhe h gibt die Höhe in Metern über der Kugeloberfläche an (vgl. Abb. 7.7).

Durch Verwendung von trigonometrischen Funktionen ergeben sich die folgenden Formeln:

$$h = \sqrt{x_E^2 + y_E^2 + z_E^2} - r \quad (7.4)$$

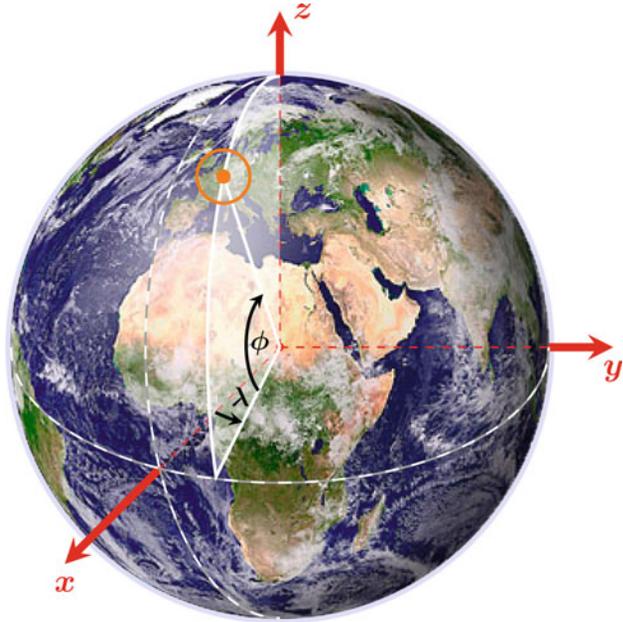
$$\phi = \arctan(z_E / \sqrt{x_E^2 + y_E^2}) \quad (7.5)$$

$$\lambda = \arctan(y_E / x_E) \quad (7.6)$$

Dabei haben wir angenommen, dass $x_E, y_E > 0$ gilt, d. h. dass wir uns zwischen 0 Grad und 90 Grad östlicher Länge befinden. In den anderen Teilen der Erde müsste man in Gl. 7.6 zusätzliche Fälle unterscheiden, oder die in vielen Computersystemen vorhandene

⁴ Die geographische Breite ϕ ist die im Winkelmaß Grad angegebene nördliche oder südliche Entfernung eines Punktes der Erdoberfläche vom Äquator und nimmt Werte von -90° am Südpol bis 90° am Nordpol an. Die geographische Länge λ ist die in Grad angegebene östliche oder westliche Entfernung eines Punktes der Erdoberfläche vom Nullmeridian und nimmt Werte von -180° in westlicher Richtung bis 180° in östlicher Richtung an.

Abb. 7.8 Abbildung auf dem Arbeitsblatt zur Veranschaulichung von Längen- und Breitengrad



Funktion `atan2` verwenden. Die Winkel ϕ und λ sind im Bogenmaß angegeben und müssen schließlich noch ins Gradmaß umgeformt werden, da sie Längen- und Breitengrad beschreiben sollen.

Die Umrechnung der kartesischen Koordinaten in geographische Koordinaten erfolgt von den Schülerinnen und Schülern selbstständig. Zur Unterstützung dient bei dem Workshop eine Abbildung auf den Arbeitsmaterialien, auf der geographische Höhe sowie Längen- und Breitengrad auf der Erde eingezeichnet sind (vgl. Abb. 7.8).

Zur Bestimmung der Höhe h greifen die Schülerinnen und Schüler wie bei der Bestimmung der Empfängerkoordinaten auf den Satz des Pythagoras bzw. auf die Berechnung der Länge des Verbindungsvektors zwischen Erdmittelpunkt und Empfänger zurück. Indem sie die aus der Schule bekannten *trigonometrischen Funktionen* Sinus, Cosinus und Tangens in geeigneten rechtwinkligen Dreiecken anwenden, können zudem Umrechnungsformeln für Breiten- und Längengrad aufgestellt werden. Bei Bedarf liegt die in Abb. 7.7 visualisierte Darstellung der Erde mit eingezeichnetem Längen- und Breitengrad bei dem Workshop als Hilfefkarte bereit, um das Erkennen geeigneter rechtwinkliger Dreiecke zu erleichtern.

7.4.3 Interpretation und Validierung der Lösung

Haben die Schülerinnen und Schüler alle Modellierungsschritte erfolgreich bearbeitet ruft das MATLAB-Skript zur Interpretation der Lösung automatisch Google Maps auf, und die von den Schülerinnen und Schülern berechnete Position wird auf der digita-

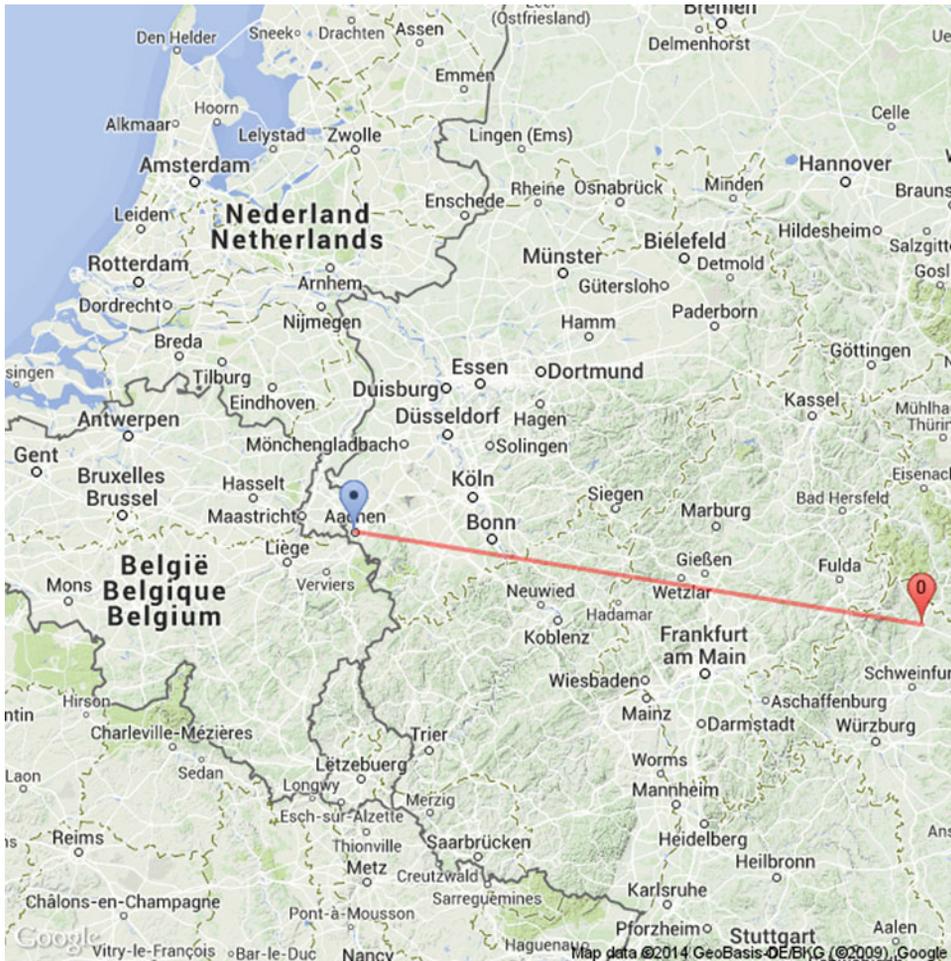


Abb. 7.9 Berechnung der Position mit GPS Daten: Die mit dem vereinfachten Modell berechnete Position auf der Erdoberfläche (*rot*) und die tatsächliche Position bei der Aufnahme der Satellitensignale in Aachen (*blau*)

len Karte visualisiert (vgl. Abb. 7.9). Auf diese Weise wird eindrücklich veranschaulicht, dass die berechnete Position mit mehr als 300 km stark von dem Workshop-Ort, an dem die Satellitendaten tatsächlich aufgenommen wurden, abweicht. Das vereinfachte Modell liefert somit keine zufriedenstellende Lösung der realen Problemstellung. Der Weg durch die *Modellierungsspirale* muss folglich fortgesetzt werden. Damit wird die Reflexion verschiedener Fehlerquellen im Modellierungsprozess angeregt und zur gemeinsamen Diskussion möglicher Präzisierungen des realen Modells mit den Schülerinnen und Schülern und damit zum zweiten Abschnitt des Modellierungsworkshops übergeleitet.

7.5 Annäherung an eine optimale Lösung

Anhand der berechneten Lösung lässt sich erkennen, dass das hergeleitete Modell zu stark vereinfacht war. In einer gemeinsamen Diskussion werden mögliche Modellverbesserungen besprochen. Dabei werden von den Schülerinnen und Schülern zumeist die folgenden Verbesserungen aufgedeckt:

1. Berücksichtigung der Zeitdilatation der Satellitenuhren⁵.
2. Berücksichtigung der Ungenauigkeiten in der Empfängeruhr.
3. Form der Erde als Ellipsoid.
4. Verwendung aller empfangenen Satellitensignale.

Im Workshop werden nacheinander diese vier Modellverbesserungen vorgenommen und bei jeder Verbesserung eine weitere Runde in der *Modellierungsspirale* durchschritten. Dabei nähern wir uns bildlich in der Spirale, und real auf der Google Maps Karte immer weiter dem tatsächlichen Ort an.

Die Schülerinnen und Schüler arbeiten mit einem Arbeitsblatt, welches die Umsetzung der einzelnen Modellverbesserungen anleitet. Die Reihenfolge der Bearbeitung der Modellverbesserungen ist den Schülerinnen und Schülern dabei freigestellt. Nachfolgend werden die einzelnen Durchläufe durch die *Modellierungsspirale* bei der Bearbeitung der Modellverbesserungen beschrieben. Dabei ist die Reihenfolge der Verbesserungen prinzipiell beliebig, da diese unabhängig voneinander sind. Wir ordnen sie im Folgenden jedoch so an, dass wir uns dem tatsächlichen Ort annähern.

7.5.1 Modellverbesserung: Berücksichtigung der Zeitdilatation der Satellitenuhren

In den Satelliten befinden sich präzise Atomuhren mit einer Gangungenauigkeit von wenigen Nanosekunden pro Monat. Man sollte somit annehmen, dass die Fehler der Satellitenuhren vernachlässigbar wären. Allerdings unterliegt die Zeit in den Satelliten den Effekten der Relativitätstheorie. Sie hängt einerseits vom Gravitationsfeld der Erde und andererseits von der Geschwindigkeit der Satelliten ab. Zum einen kommt es durch die Bewegung der Satelliten zu einer Zeitverzögerung (spezielle Relativitätstheorie), zum anderen jedoch lässt ein geringeres Gravitationsfeld die Zeit schneller vergehen als auf der Erde (allgemeine Relativitätstheorie).

Dabei überwiegt der gravitative Effekt (also die allgemeine Relativitätstheorie) um mehr als das sechsfache, wodurch die Zeit in den Satelliten insgesamt schneller vergeht als auf der Erde. Um den Schülerinnen und Schülern diese relativistischen Effekte und deren

⁵ Diese Verbesserung wird interessanterweise seit dem Weltraumfilm *Interstellar* (2015) sehr häufig von den Schülerinnen und Schülern angesprochen.

Einfluss auf die Sendezeit und damit auf das entwickelte mathematische Modell zu verdeutlichen, wird nach der Diskussion zu möglichen Modellverbesserungen ein Kurzfilm des Südwestrundfunks⁶ gezeigt. Dieser erklärt den Einfluss von Einsteins Relativitätstheorie auf unsere heutige Satellitentechnik in anschaulicher Weise.

Zur Korrektur der Satellitenuhrfehler finden sich in den Ephemeriden drei Parameter a_{f_0} , a_{f_1} und a_{f_2} und die Referenzzeit t_{oc} . Der Zeitfehler Δt einer Satellitenuhr hängt dabei von der Zeit t ab und ergibt sich nach den Interface Spezifikationen IS-GPS-200 (vgl. Dunn 2013) wie folgt:

$$\Delta t = a_{f_0} + a_{f_1} (t - t_{oc}) + a_{f_2} (t - t_{oc})^2 + \Delta t_r \quad (7.7)$$

Δt_r ist ein relativistischer Korrekturterm, der die Ellipsenbahn des Satelliten berücksichtigt. Würde der Satellit die Erde auf einer Kreisbahn mit konstanter Geschwindigkeit umkreisen, wäre das Verhältnis von Zeitbeschleunigung aufgrund des Gravitationsfeldes zu Zeitverzögerung aufgrund der Bewegung immer konstant. Auf einer Ellipsenbahn ist dieses Verhältnis jedoch niemals konstant, da sich einerseits die Geschwindigkeit des Satelliten und andererseits der Abstand zur Erde ständig verändert. Die Veränderung des Verhältnisses von Zeitbeschleunigung zu Zeitverzögerung wird durch den Term Δt_r berücksichtigt. Dieser hängt ebenfalls von der Zeit t ab und wird wie folgt berechnet:

$$\Delta t_r = Fe\sqrt{A} \sin E_k \quad (7.8)$$

Die Konstante

$$F = -2\sqrt{\mu}/c^2 \quad (7.9)$$

kann aus dem Gravitationsparameter μ und der Lichtgeschwindigkeit c berechnet werden. Die numerische Exzentrizität e und die Wurzel der großen Halbachse \sqrt{A} sind in den Ephemeriden hinterlegt, die zeitabhängige exzentrische Anomalie E_k muss wie bei der Berechnung der Satellitenkoordinaten aus der Kepler-Gleichung ermittelt werden.

Der Fehler der Satellitenuhr sollte zur Sendezeit der Nachricht berechnet werden. Da der Fehler vom Sendezeitpunkt abhängt und der Sendezeitpunkt fehlerbehaftet ist, muss der Satellitenuhrfehler iterativ bestimmt werden. Um das zu veranschaulichen wird die Gl. 7.7 zur Berechnung der Satellitenuhrfehler durch eine Funktion f in Abhängigkeit der Zeit t dargestellt:

$$f(t) = a_{f_0} + a_{f_1} (t - t_{oc}) + a_{f_2} (t - t_{oc})^2 + \Delta t_r(t) \quad (7.10)$$

⁶ Frank Wittig (2013): GPS-Satelliten – Wie Einstein unseren Alltag beeinflusst [Kurzfilm des Südwestrundfunks], veröffentlicht am 05.06.2013, online unter: <http://www.swr.de/odyso/wie-einstein-unseren-alltag-beeinflusst/-/id=1046894/did=11343438/mid=1046894/131feqm/>, abgerufen am 31.10.2016.

Weiterhin werden folgende Bezeichnungen eingeführt:

- t_S : Falsche Sendezeit des Satelliten (bekannt)
 $\Delta t_S = f(t_S)$: Fehler der Satellitenuhr zur falschen Sendezeit t_S (bekannt)
 t_S^* : Wahre Sendezeit des Satelliten (unbekannt)
 $\Delta t_S^* = f(t_S^*)$: Fehler der Satellitenuhr zur wahren Sendezeit t_S^* (unbekannt)

Der Zusammenhang zwischen der falschen Sendezeit t_S und der wahren Sendezeit t_S^* ist $t_S = t_S^* + \Delta t_S^*$. Somit ergibt sich für den Fehler Δt_S^* der Satellitenuhr die implizite Gleichung

$$\Delta t_S^* = f(t_S - \Delta t_S^*) \quad (7.11)$$

Diese Gleichung kann durch die einfache Rekursion

$$\Delta t_S^* = f(t_S - f(t_S)) \quad (7.12)$$

annähernd gelöst werden.

Von den Schülerinnen und Schülern wird nicht erwartet, dass sie diese recht komplexe Berechnung des tatsächlichen Satellitenuhrfehlers eigenständig leisten. Die Berechnung dieses Fehlers wird stattdessen dem Computer überlassen. In der ersten Runde der *Modellierungsspirale* in Abschn. 7.4 wurden die Satellitenkoordinaten und die Pseudoentfernung Gl. 7.1 auf Grundlage der fehlerbehafteten Zeit t_{S_k} bestimmt. Die Schülerinnen und Schüler müssen den Einfluss des Fehlers auf diese beiden Größen erkennen und dann die korrigierte Satellitenzeit ($t_{S_k} - \Delta t_{S_k}$) bei der Berechnung der Satellitenkoordinaten sowie bei der Berechnung der Pseudoentfernung berücksichtigen.

Durch die Berücksichtigung der ersten Modellverbesserung in ihrem Modell durchschreiten die Schülerinnen und Schüler den gesamten Modellierungsprozess ein zweites Mal. Sie schreiten auf der Modellierungsspirale näher an die Lösung heran, was im Workshop geographisch auf der digitalen Karte veranschaulicht wird. Die erhaltene neue Empfängerposition liegt nun knapp 215 km näher an der tatsächlichen Position als die mit dem vereinfachten Modell berechnete Position (vgl. Abb. 7.10). Dennoch weicht die erhaltene Lösung weiterhin stark von der eigentlichen Position ab, was zu einer weiteren Verbesserung des Modells motiviert.

7.5.2 Modellverbesserung: Berücksichtigung der Ungenauigkeiten in der Empfängeruhr

In der Empfängeruhr ist für gewöhnlich eine einfache Quarzuhr mit einer Ungenauigkeit von einigen Sekunden pro Monat verbaut. Aus den vorangegangenen Überlegungen wird deutlich (vgl. Abschn. 7.4), dass auch eine Funkuhr unter Umständen zu ungenau für die GPS-Positionsbestimmung ist. Hauptidee ist es, diesen Fehler in der Zeitmessung als eine (vierte) Unbekannte zu berücksichtigen, und einen vierten Satelliten hinzuzuziehen.

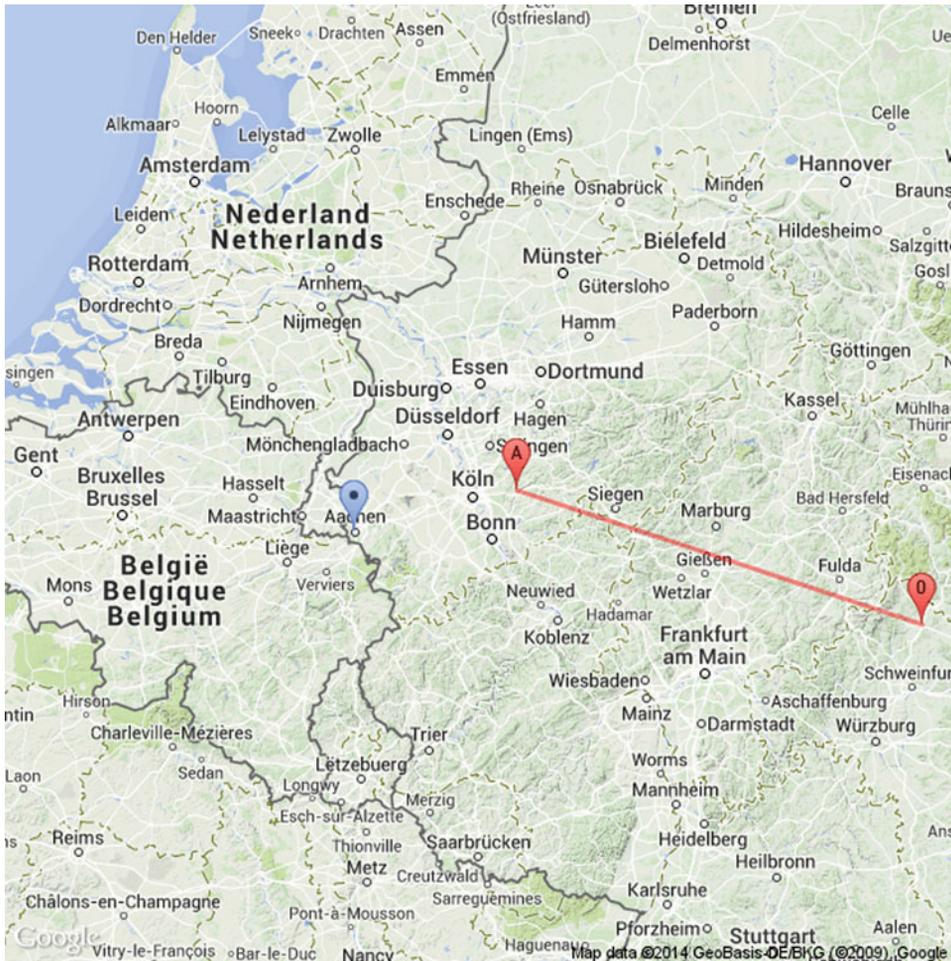


Abb. 7.10 Berechnung der Position mit GPS Daten: Die mit dem vereinfachten Modell berechnete Position auf der Erdoberfläche (O), die mit Modellverbesserung (Zeitdilatation) berechnete Position (A), und die tatsächliche Position der Aufnahme der Satellitensignale in Aachen (*blau*)

Aufgrund des unbekanntem Zeitfehlers von Δt_E entspricht die Entfernung der Satelliten nicht wie in Gl. 7.1 ermittelt und in der ersten Modellverbesserung in Abschn. 7.5.1 korrigiert

$$d_{S_k} = (t_{E_k} - (t_{S_k} - \Delta t_{S_k})) \cdot c \quad (7.13)$$

sondern sie ergibt sich gemäß

$$(d_{S_k} - c\Delta t_E) = ((t_{E_k} - \Delta t_E) - (t_{S_k} - \Delta t_{S_k})) \cdot c \quad (7.14)$$

Unter Berücksichtigung dieser Distanzkorrektur ändern sich die in Gl. 7.3 aufgestellten Formeln folgendermaßen:

$$\begin{aligned}\sqrt{(x_{S_1} - x_E)^2 + (y_{S_1} - y_E)^2 + (z_{S_1} - z_E)^2} &= d_{S_1} - c\Delta t_E \\ \sqrt{(x_{S_2} - x_E)^2 + (y_{S_2} - y_E)^2 + (z_{S_2} - z_E)^2} &= d_{S_2} - c\Delta t_E \\ \sqrt{(x_{S_3} - x_E)^2 + (y_{S_3} - y_E)^2 + (z_{S_3} - z_E)^2} &= d_{S_3} - c\Delta t_E\end{aligned}\quad (7.15)$$

Da hier nun vier Unbekannte ($x_E, y_E, z_E, \Delta t_E$) vorliegen, wird zur Lösung des Gleichungssystems noch eine weitere Gleichung, die eines vierten Satelliten, benötigt.

$$\sqrt{(x_{S_4} - x_E)^2 + (y_{S_4} - y_E)^2 + (z_{S_4} - z_E)^2} = d_{S_4} - c\Delta t_E \quad (7.16)$$

Wie in Abschn. 7.4 handelt es sich hierbei um ein nichtlineares Gleichungssystem mit gleich vielen Gleichungen wie Unbekannten. Erneut kann hier das Newton-Verfahren verwendet werden, um das Problem numerisch zu lösen, wobei sich der Erdmittelpunkt (0,0,0) und ein Zeitfehler von 0 als Startpunkt anbietet. Die Benutzung des Bancroft-Algorithmus (vgl. Bancroft 1985) ist ebenfalls möglich.

Die Schülerinnen und Schüler erhalten auf dem Arbeitsblatt zu diesem Abschnitt des Workshops lediglich den Hinweis, dass der unbekannte Zeitfehler Δt_E bei der Berechnung der Empfängerkoordinaten zu berücksichtigen ist. Zunächst ist von den Schülerinnen und Schüler somit der Einfluss des Zeitfehlers auf die Pseudoentfernung zu erkennen. Die sich nach der Korrektur ergebende neue Pseudoentfernung ($d_{S_k} - c\Delta t_E$) müssen sie schließlich in ihr bestehendes Gleichungssystem einbauen. Im letzten Schritt gilt es dann zu erkennen, dass es sich bei dem Zeitfehler Δt_E um eine weitere Unbekannte handelt. Es liegen somit vier Unbekannte aber bisher nur drei Gleichungen vor. Zur eindeutigen Lösung dieses Gleichungssystems müssen die Schülerinnen und Schüler folglich eine weitere Gleichung und damit die Daten eines vierten Satelliten einbeziehen. Um Schülerinnen und Schülern, die Schwierigkeiten haben zu erkennen an welcher Stelle ihrer mathematischen Beschreibungen der Zeitfehler Einfluss nimmt, dennoch die Bearbeitung dieser Modellverbesserung möglich zu machen, liegt eine Hilfekarte mit den folgenden Hinweisen bereit:

- *Überlegt euch, welche Auswirkung es für die Pseudoentfernungen hat, wenn die Uhr im Empfänger um eine Sekunde vorgeht (das wäre ein Zeitfehler von +1 Sekunde).*
- *Verallgemeinert: Wie müssen die Pseudoentfernungen korrigiert werden, wenn der Fehler der Empfängeruhr t Sekunden beträgt?*
- *Überlegt: Wie muss das Gleichungssystem verändert werden, wenn der Fehler der Empfängeruhr unbekannt ist?*

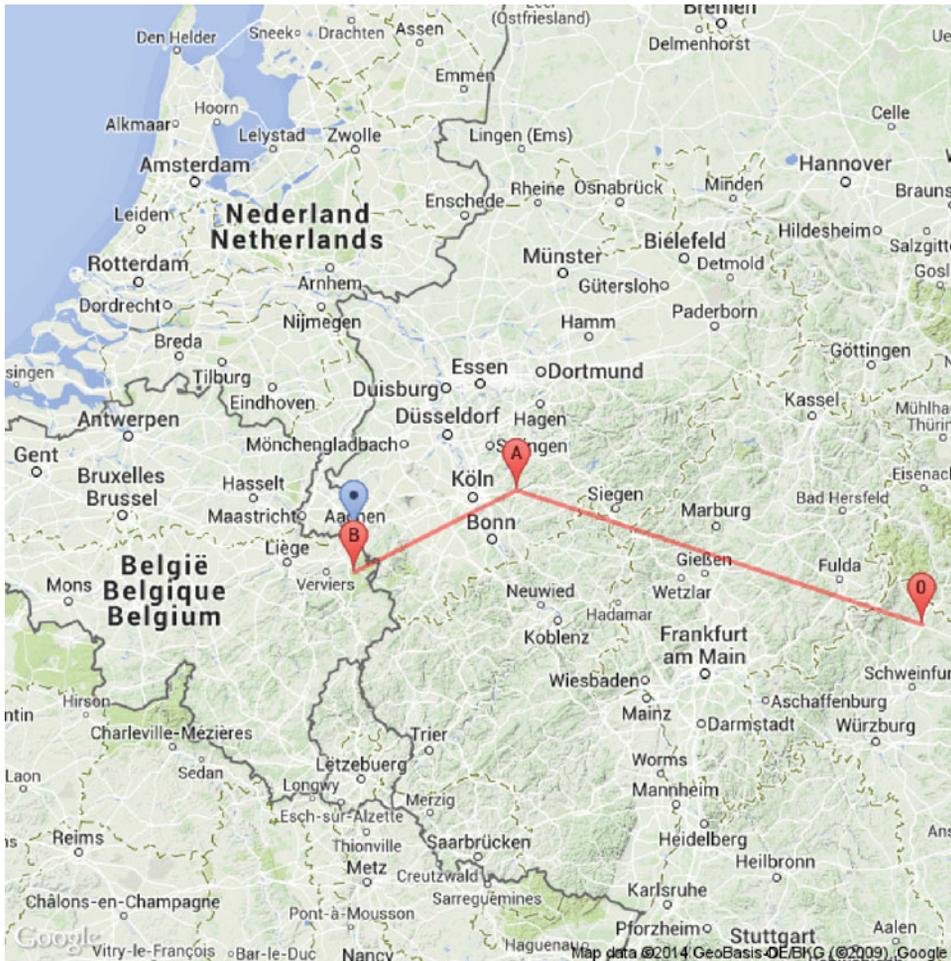


Abb. 7.11 Berechnung der Position mit GPS Daten: Die mit dem vereinfachten Modell berechnete Position auf der Erdoberfläche (O), die mit Modellverbesserung (Zeitdilatation) berechnete Position (A), die mit Modellverbesserungen (Zeitdilatation und Empfängeruhr) berechnete Position (B) und die tatsächliche Position der Aufnahme der Satellitensignale in Aachen (blau)

Die Schülerinnen und Schüler können sich so ausgehend von einem konkreten Beispiel schrittweise den Einfluss des Zeitfehlers auf die Entfernung und damit auch auf das Gleichungssystem herleiten.

Das Lösen des nichtlinearen Gleichungssystems erfolgt im Workshop erneut unter Verwendung des Computers. Von den Schülerinnen und Schülern ist dazu die voreingestellte Auswahl der Satelliten im MATLAB-Skript von nur 3 Satelliten auf 4 Satelliten zu erweitern, der Zeitfehler der Empfängeruhr als Unbekannte einzubauen und der Startwert für das Newton-Verfahren um eine weitere Komponente zu ergänzen. Die durch das nun dritte

Durchschreiten sämtlicher Modellierungsschritte erhaltene neue Empfängerposition ist in Abb. 7.11 dargestellt. Es ergibt sich erneut eine Verbesserung um etwas mehr als 66 km. Die berechnete Empfängerposition liegt im belgischen Teil des Nationalparks Eifel und damit nur noch 21 km von der tatsächlichen Position des Empfängers entfernt. Dennoch stellt dies kein zufriedenstellendes Ergebnis dar. Der Einbau weiterer Modellverbesserungen ist notwendig.

7.5.3 Modellverbesserung: Form der Erde als Ellipsoid

Aufgrund der Fliehkraft der Erdrotation weicht die Form der Erde von der bisher angenommenen perfekten Kugelform ab. Die Form der Erde lässt sich vielmehr durch die eines abgeplatteten Rotationsellipsoiden beschreiben (was jedoch weiterhin nur einer Approximation der tatsächlichen Form entspricht).

Der Abstand vom Mittelpunkt zum Äquator wird durch die große Halbachse a , der Abstand vom Mittelpunkt zu den beiden Polen durch die kleine Halbachse b beschrieben. Die Abplattung f und die numerische Exzentrizität ε lassen sich aus den beiden Halbachsen a und b berechnen und sind wie folgt definiert:

$$f = (a - b)/a \quad (7.17)$$

$$\varepsilon = \sqrt{a^2 - b^2}/a \quad (7.18)$$

Beim Referenzellipsoiden WGS 84 des World Geodetic Systems aus dem Jahre 1984 werden folgende Werte benutzt:

$a = 6.378.137$ m: große Halbachse

$b = 6.356.752,3$ m: kleine Halbachse

$f = 1/298,257223563$: Abplattung

$\varepsilon = 8,181919 \cdot 10^{-2}$: Exzentrizität

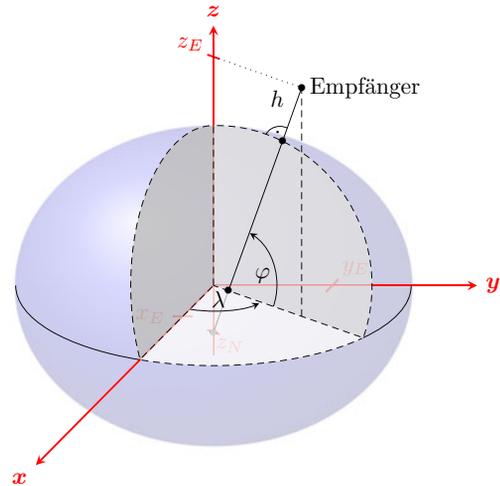
Der Zusammenhang zwischen den kartesischen Koordinaten x, y, z und den geographischen Koordinaten ϕ, λ und h bei einem Rotationsellipsoid wird in Abb. 7.12 veranschaulicht und lautet:

$$\begin{aligned} x_E &= (N_\phi + h) \cdot \cos(\phi) \cdot \cos(\lambda) \\ y_E &= (N_\phi + h) \cdot \cos(\phi) \cdot \sin(\lambda) \\ z_E &= (N_\phi(1 - \varepsilon^2) + h) \cdot \sin(\phi) \end{aligned} \quad (7.19)$$

Dabei gilt für den Krümmungsradius des ersten Vertikals N_ϕ , dem Abstand des Lotfußpunktes vom Schnittpunkt des verlängerten Lots mit der z -Achse, folgender Zusammenhang:

$$N_\phi = a / \sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2(\phi)} \quad (7.20)$$

Abb. 7.12 Form der Erde als Rotationsellipsoid. Das Lot auf die Oberfläche des Ellipsoids geht nicht notwendigerweise durch den Erdmittelpunkt



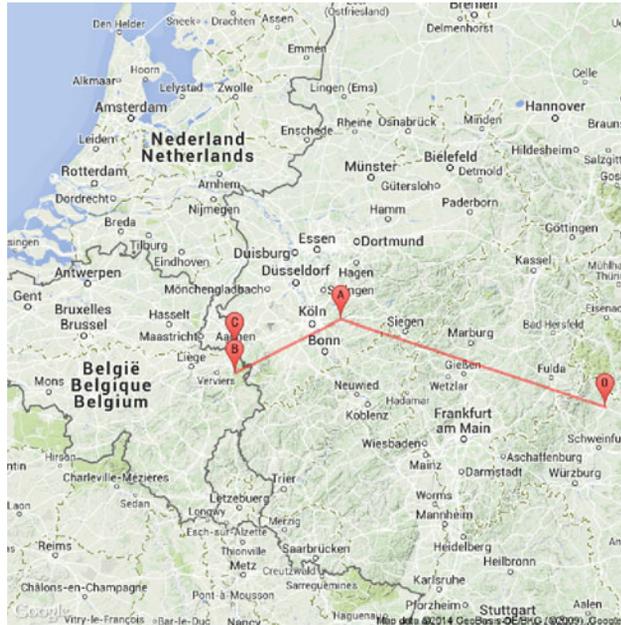
Das Gleichungssystem lässt sich nicht ohne Weiteres nach den Unbekannten ϕ , λ und h auflösen. Da es sich hier um ein nichtlineares Gleichungssystem mit gleich vielen Gleichungen wie Unbekannten handelt, kann hier erneut das Newton-Verfahren verwendet werden. Als Startwert sollte ein Wert gewählt werden der bereits sehr nah an der exakten Lösung liegt. Daher bietet es sich an, die in Gl. 7.4 bestimmte Lösung, die unter Annahme einer perfekten Kugelform ermittelt wurde, zu verwenden.

Im Workshop liefert die Aufgabenstellung zu dieser Modellverbesserung den Schülerinnen und Schülern bereits den Hinweis, sich über den Referenzellipsoiden WGS 84 zu informieren. Unter Verwendung des Internets als Informationsmedium gelangen sie schnell zu den Umrechnungsformeln Gl. 7.19⁷. Von den Schülerinnen und Schülern muss nun erfasst werden, dass sich durch Umstellung dieser Gleichungen keine expliziten Formeln für die Winkel ϕ und λ sowie die Höhe h ergeben. Ein direktes Berechnen dieser ist damit nicht mehr wie bisher möglich. Die Schwierigkeit ist somit zu erkennen, dass wie bei der Berechnung der Empfängerkoordinaten ein nichtlineares Gleichungssystem vorliegt, das analog zu lösen ist.

Die neue Empfängerposition, die nur noch ca. 27 m von der tatsächlichen Position abweicht, ist in Abb. 7.13 dargestellt. Im Vergleich zu dem Ergebnis, welches die Schülerinnen und Schüler mit dem ersten Modell erhalten haben, ist dies bereits eine bemerkenswerte Verbesserung. Stellt man sich jedoch vor, dass man mit einem Navigationsgerät Auto fährt, dessen Positionsangabe um mehr als 25 m abweicht, so würde man an der einen oder anderen Stelle sicherlich eine falsche Abbiegung nehmen! Dies motiviert auch den Einbau der letzten im Rahmen des Workshops durchgeführten Modellverbesserung und ein weiteres Fortschreiten auf der Modellierungsspirale.

⁷Zum Beispiel auf Wikipedia lassen sich schnell die notwendigen Formeln finden <https://de.wikipedia.org/wiki/Referenzellipsoid>, abgerufen am 07.03.2017.

Abb. 7.13 Berechnung der Position mit GPS Daten: (O) Vereinfachtes Modell, (A) Modellverbesserung (Zeitdilatation), (B) Modellverbesserungen (Zeitdilatation und Empfängeruhr), und (C) Modellverbesserungen (Zeitdilatation, Empfängeruhr, Ellipsoid)



7.5.4 Modellverbesserung: Verwendung aller empfangener Satellitensignale und Gewichtung

Bisher wurden die Daten von lediglich drei bzw. nach Berücksichtigung der Modellverbesserung Abschn. 7.5.2 vier Satelliten genutzt, da mit den Koordinaten des Empfängers zunächst nur drei bzw. nach Berücksichtigung des Fehlers der Empfängeruhr vier Unbekannte vorliegen. Auf der Erde empfängt man jedoch zu jedem Zeitpunkt acht oder mehr Satellitensignale. Was passiert mit der Lösung, wenn nun nicht drei oder vier, sondern alle Satellitensignale verwendet werden?

Das Gleichungssystem für alle n empfangenen Daten lautet:

$$\begin{aligned}
 \sqrt{(x_{S_1} - x_E)^2 + (y_{S_1} - y_E)^2 + (z_{S_1} - z_E)^2} &= d_{S_1} - c\Delta t_E \\
 \sqrt{(x_{S_2} - x_E)^2 + (y_{S_2} - y_E)^2 + (z_{S_2} - z_E)^2} &= d_{S_2} - c\Delta t_E \\
 \sqrt{(x_{S_3} - x_E)^2 + (y_{S_3} - y_E)^2 + (z_{S_3} - z_E)^2} &= d_{S_3} - c\Delta t_E \\
 &\vdots \\
 \sqrt{(x_{S_n} - x_E)^2 + (y_{S_n} - y_E)^2 + (z_{S_n} - z_E)^2} &= d_{S_n} - c\Delta t_E
 \end{aligned} \tag{7.21}$$

Es liegen nun mehr Gleichungen als Unbekannte, und somit ein überbestimmtes Gleichungssystem vor. Da die Satellitendaten durch kleine Fehler gestört sind, wird sich dieses

Gleichungssystem nicht eindeutig lösen lassen. Daher verwendet man die Ideen der linearen Ausgleichsrechnung. Man betrachtet diejenige Lösung als die bestmögliche, die das Residuum, also die Differenz aus linker und rechter Seite, minimiert.

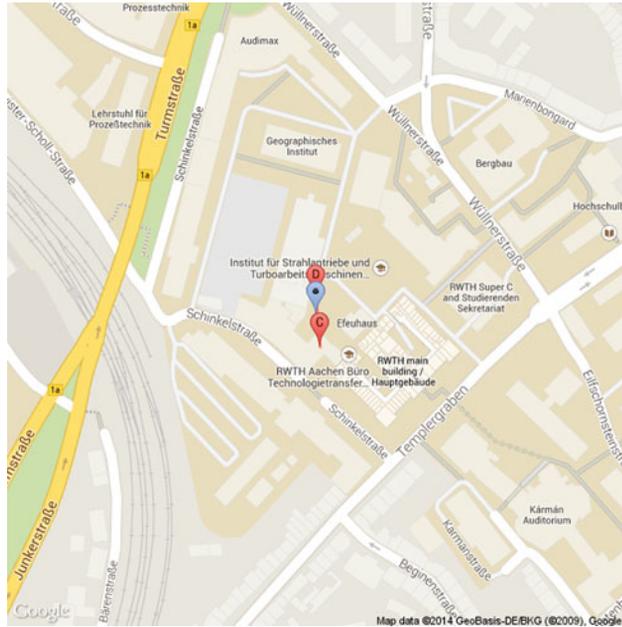
Ein bekanntes Verfahren zur Lösung nichtlinearer Ausgleichsprobleme ist das *Gauß-Newton-Verfahren*, welches einen Abkömmling des Newton-Verfahrens darstellt. Für dieses bietet sich erneut der Erdmittelpunkt $(0,0,0)$ und ein Zeitfehler von 0 als Startpunkt an.

Man beachte, dass die Satellitensignale durch die Erdatmosphäre abgebremst werden, und zwar je mehr, desto länger der Weg der Signale durch die Atmosphäre ist. Signale von Satelliten, die im Zenit über dem Empfänger stehen, werden somit etwas weniger abgebremst als Nachrichten, die schräg einfallen. Da vor allem die schräg einfallenden Signale zu größeren Fehlern führen, wäre es sinnvoll, diese Signale auszusortieren oder aber weniger stark zu berücksichtigen. Dafür wird in der Praxis ein Kalman-Filterverfahren verwendet (vgl. Strang und Borre 2012). Als einfaches Modell für eine Atmosphärenkorrektur kann man den Nachrichten mit großer Signalstärke eine höhere Gewichtung geben als den Nachrichten mit kleiner Signalstärke. Somit ergibt sich ein neues Gleichungssystem, welches die Signalstärke g_k des k -ten Satelliten berücksichtigt:

$$\begin{aligned}
 g_1 \cdot \sqrt{(x_{S_1} - x_E)^2 + (y_{S_1} - y_E)^2 + (z_{S_1} - z_E)^2} &= g_1 \cdot (d_{S_1} - c\Delta t_E) \\
 g_2 \cdot \sqrt{(x_{S_2} - x_E)^2 + (y_{S_2} - y_E)^2 + (z_{S_2} - z_E)^2} &= g_2 \cdot (d_{S_2} - c\Delta t_E) \\
 g_3 \cdot \sqrt{(x_{S_3} - x_E)^2 + (y_{S_3} - y_E)^2 + (z_{S_3} - z_E)^2} &= g_3 \cdot (d_{S_3} - c\Delta t_E) \\
 &\vdots \\
 g_n \cdot \sqrt{(x_{S_n} - x_E)^2 + (y_{S_n} - y_E)^2 + (z_{S_n} - z_E)^2} &= g_n \cdot (d_{S_n} - c\Delta t_E)
 \end{aligned} \tag{7.22}$$

Berechnen die Schülerinnen und Schüler die Empfängerposition über das in Abschn. 7.4 beschriebene erste Modell mit verschiedenen Satellitenkombinationen (z. B. S_1, S_2, S_3 oder S_5, S_7, S_8) so stellen sie schnell fest, dass sich damit unterschiedliche Positionen auf der Erde ergeben. Um die Frage zu umgehen, welche dieser Satellitensignale nun verwendet werden sollen, um mit diesen die tatsächliche Position zu berechnen, beziehen die Schülerinnen und Schüler bei dieser Modellverbesserung alle acht empfangenen Satellitensignale in das Modell ein. Dazu müssen sie das Gleichungssystem 7.3 zur Berechnung der Empfängerkoordinaten auf acht Gleichungen erweitern. Die Lösung des so erhaltenen *überbestimmten nichtlinearen Gleichungssystems* kann nicht als *Schulwissen* vorausgesetzt werden. Deswegen erhalten die Schülerinnen und Schüler bereits auf den Arbeitsmaterialien den Hinweis, dass sich dieses Gleichungssystem nicht mehr exakt lösen lässt und ein alternatives Lösungsverfahren notwendig ist. Die Einbeziehung der oben beschriebenen Gewichtung der Satellitensignale in das Modell wird in dem Workshop in der Regel nicht durchgeführt. Es kann jedoch als *Zusatzprogramm* betrachtet werden, welches

Abb. 7.14 Berechnung der Position mit GPS Daten: Die mit den Modellverbesserungen (Zeitdilatation, Empfängeruhr, Ellipsoid) berechnete Position (C), die mit den Modellverbesserungen berechnete Position (D), und die tatsächliche Position der Aufnahme der Satellitensignale in Aachen (blau)



die Schülerinnen und Schüler bearbeiten, die alle bisherigen Verbesserungen erfolgreich in ihr Modell eingebaut haben. Dazu liegt ein Arbeitsblatt bereit, welches die Idee der Gewichtung erläutert und deren Umsetzung anleitet.

Wendet man das Verfahren ohne Gewichtung an, so ergibt sich die in Abb. 7.14 dargestellte Lösung, die nur noch wenige Meter von der gemessenen Position abweicht. Eine im Vergleich zu der Lösung, die mit dem ersten entwickelten Modell erhalten wurde, doch bemerkenswerte Verbesserung, die den Schülerinnen und Schülern durch die Visualisierung auf der digitalen Karte eindrücklich veranschaulicht wird.

Die Schülerinnen und Schüler erleben im Workshop bei diesen insgesamt fünf Durchläufen durch sämtliche Modellierungsschritte, wie sich ihr Modell immer weiter verbessert und sich ihre berechnete Lösung immer mehr der tatsächlichen Position des Empfängers annähert. Dabei lernen sie den Computer als nützliches Werkzeug kennen und erfassen durch die Berücksichtigung physikalischer Phänomene bei der Bearbeitung der Problemstellung, dass reales Problemlösen vielfach ein interdisziplinäres Arbeiten notwendig macht. Dass jedoch weiterhin eine, wenn auch geringere, Abweichung zwischen berechneter und tatsächlicher Position vorliegt, zeigt den Schülerinnen und Schülern auf, dass die *Modellierungsspirale* durchaus noch weitere Male durchschritten werden kann. Weitere getroffene Modellannahmen können überdacht und andere Verbesserungen vorgenommen werden, um so der tatsächlichen Lösung noch näher zu kommen und der realen Situation damit mehr und mehr zu entsprechen.

7.6 Rahmenbedingungen und Ausblick

Der in diesem Artikel vorgestellte Schülerworkshop „Wie funktioniert eigentlich GPS und was hat das mit Mathe zu tun?“ wurde am Schülerlabor CAMMP der RWTH Aachen von Wiener im Rahmen seiner Abschlussarbeit als eintägige Veranstaltung für Schülergruppen der Oberstufe konzipiert. Seitdem wurde der Workshop bereits mit über 20 Schülergruppen und insgesamt über 300 Schülerinnen und Schülern durchgeführt und wird fortwährend weiterentwickelt.

Workshops (CAMMP days) beginnen stets mit einem Vortrag, der die Schülerinnen und Schüler in das Themenfeld *Mathematische Modellierung und Simulation* einführt und dessen Bedeutung für Lebenswelt, Industrie und Wissenschaft anhand von ausgewählten Beispielen veranschaulicht. Im Zuge dessen werden auch die in Abschn. 7.2 beschriebenen Schritte des Modellbildungsprozesses thematisiert. Anschließend werden die Schülerinnen und Schüler durch einen weiteren Vortrag und eine anschließende Diskussion in die jeweilige Problemstellung eingeführt. Begleitet durch Plenumsdiskussionen und unter Verwendung von Arbeitsblättern sowie vorbereiteten MATLAB-Skripten erarbeiten die Schülerinnen und Schüler weitgehend selbständig ein erstes Modell zur Lösung der Problemstellung und nehmen anschließend entsprechende Modellverbesserungen vor.

Unser längerfristiges Ziel ist es, die für die außerschulischen Unterrichtseinheiten am Lehr-Lern-Labor konzipierten Materialien für den Einsatz im regulären Mathematikunterricht in der Schule aufzuarbeiten und Fortbildungen für Lehrkräfte dazu anzubieten. Teile des hier vorgestellten Materials wurden in knapp vier Schulstunden in einem Leistungskurs der gymnasialen Oberstufe im Rahmen einer Unterrichtsreihe zur Relativitätstheorie eingesetzt. Dabei wurden die Satellitenkoordinaten vorgegeben. Alle weiteren in den Abschn. 7.4 und 7.5 beschriebenen Schritte konnten von den Schülerinnen und Schülern selbstständig mit einem grafikfähigen Taschenrechner erarbeitet werden. Das eingesetzte Taschenrechnermodell verfügte dabei über die Funktionalität, nichtlineare Gleichungssysteme lösen zu können. Alternativ wäre jedoch auch hier die Bearbeitung mithilfe des Programms GeoGebra im CAS-Modus möglich.

Danksagung

Die Autoren bedanken sich bei Markus Wiener und Maren Hattebuhr für Unterstützung bei der Entwicklung des Materials, sowie beim Schreiben dieses Artikels. Diese Arbeit ist im Rahmen des Projekts LeBiAC entstanden. Das Projekt „LeBiAC – Gemeinsam verschieden sein“ wird im Rahmen der gemeinsamen „Qualitätsoffensive Lehrerbildung“ von Bund und Ländern aus Mitteln des Bundesministeriums für Bildung und Forschung gefördert.

Literatur

Bancroft, S. (1985). An algebraic solution of the GPS equations. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 21, 56–59.

- Blum, W. (1985). Anwendungsorientierter Mathematikunterricht in der didaktischen Diskussion. *Mathematische Semesterberichte*, 32(2), 195–232.
- Blum, W., & Leiss, D. (2007). How do students and teachers deal with modelling problems. In C. Haines, P. Galbraith, W. Blum & S. Khan (Hrsg.), *Mathematical Modelling (ICTMA 12): Education, Engineering and Economics* (S. 222–231). Chichester: Horwood.
- Büchter, A., & Leuders, T. (2005). *Mathematikaufgaben selbst entwickeln. Lernen fördern – Leistung überprüfen*. Berlin: Cornelsen Scriptor.
- Dunn, M. (2013). *Interface Specification IS GPS 200 Revision H, Navstar GPS Space Segment/Navigation User Interfaces (IS GPS 200G)*. Technical report, Global Positioning Systems Directorate, Systems Engineering and Integration.
- Eichler, A. (2015). Zur Authentizität realitätsorientierter Aufgaben im Mathematikunterricht. In *Werner Blum und seine Beiträge zum Modellieren im Mathematikunterricht* (S. 105–118). Berlin, Heidelberg: Springer.
- Greefrath, G. (2011). Using technologies: new possibilities of teaching and learning modelling-overview. In K. Gabriele, W. Blum, R. Borromeo Ferri & G. Stillman (Hrsg.), *Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modeling* (S. 301–304). Dordrecht: Springer.
- Greefrath, G., & Riemer, W. (2013). Mit Positionen rechnen – GPS im Mathematikunterricht nutzen. *Praxis der Mathematik in der Schule*, 55(53), 2–9.
- Greefrath, G., & Siller, H.-S. (2009). *Mathematical modelling in class regarding to technology*. CERME-post-conference-proceedings, Lyon.
- Greefrath, G., & Weitendorf, J. (2013). Modellieren mit digitalen Werkzeugen. In R. Borromeo Ferri, G. Greefrath & G. Kaiser (Hrsg.), *Mathematisches Modellieren für Schule und Hochschule* (S. 181–201). Wiesbaden: Springer.
- Gurtner, W., & Estey, L. (2007). *Rinex-the receiver independent exchange format-version 3.00*. Boulder: Astronomical Institute, University of Bern and UNAVCO.
- Haines, C. R., Crouch, R. M., & Davis, J. (2001). Understanding Students' Modelling Skills. In J. F. Matos, W. Blum, K. Houston & S. P. Carreira (Hrsg.), *Modelling and mathematics education: ICTMA9 applications in science and technology* (S. 366–380). Chichester: Horwood.
- Haubrock, D. (2000). GPS in der analytischen Geometrie. In F. Förster, H.-W. Henn & J. Meyer (Hrsg.), *Materialien für einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht (Schriftenreihe der ISTRON-Gruppe)* (Bd. 6, S. 86–103). Hildesheim: Franzbecker.
- Maaß, K. (2010). Classification scheme for modelling tasks. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 31(2), 285–311.
- Meyer, J. (2014). Skalarprodukt und GPS. In H.-W. Henn & J. Meyer (Hrsg.), *Neue Materialien für einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht 1*. ISTRON-Schriftenreihe. (S. 45–52). Wiesbaden: Springer.
- Schiller, T. (2011). GPS-Beispiele im Mathematikunterricht – Das Global Positioning System und dessen Genauigkeit in der Schule. In G. Greefrath, J. Maaß & H.-S. Siller (Hrsg.), *Materialien für einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht*. Schriftenreihe der ISTRON-Gruppe. (S. 143–160). Hildesheim: Franzbecker.
- Schönbrodt, S. (2015). Didaktisch-methodische Ausarbeitung eines Lernmoduls zum Thema Google im Rahmen eines Modellierungstages für Schülerinnen und Schüler der Sekundarstufe II. Bachelorarbeit, RWTH Aachen University.
- Strang, G., & Borre, K. (2012). *Algorithms for global positioning*. Cambridge: Wellesley-Cambridge Press.
- Wiener, M. (2015). Didaktisch-methodische Ausarbeitung eines Lernmoduls zum Thema GPS mit Hilfe von Matlab im Rahmen eines Modellierungstages für Schülerinnen und Schüler der Sekundarstufe II. Schriftliche Hausarbeit im Rahmen der Ersten Staatsprüfung für das Lehramt an Gymnasien und Gesamtschulen, RWTH Aachen University.