

Modellierung und Simulation der
Direktverdampfung in Absorberrohren
solarthermischer Kraftwerke

Modelling and simulation of direct steam generation
in the absorber tubes of solar thermal power plants

von

Dipl.-Inform. Pascal Richter

Diplomarbeit in Mathematik

vorgelegt der

Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät der
Rheinisch-Westfälischen Technischen Hochschule Aachen
im Mai 2011

Angefertigt bei

Prof. Dr. rer. nat. Martin Frank
Lehrstuhl für Mathematik CCES

Zweitgutachter

Prof. Dr. rer. nat. Volker Wittwer
Fraunhofer Institut für Solare Energiesysteme



Für meine kleine Familie.

Danksagung

An dieser Stelle bedanke ich mich bei allen Personen, die mich bei der Erstellung dieser Arbeit unterstützt haben.

An aller erster Stelle gilt mein herzlicher Dank Herrn Professor Martin Frank, der die Arbeit fachlich betreut hat und stets für mich ansprechbar war. Weiterhin danke ich Herrn Prof. Wittwer aus Freiburg, der nach meiner Informatik Diplomarbeit nun auch diese Diplomarbeit begutachtet. Anton Neuhäuser und Gabriel Morin vom Fraunhofer ISE danke ich vor allem für die Themenstellung und die Hilfe bei thermodynamischen Problemen.

Weiterhin bedanke ich mich bei allen Kollegen des MATHCCES für die konstruktive und angenehme Arbeitsatmosphäre, sowie der fachlichen Hilfestellung, namentlich Dr. Richard Barnard, Dr. James McDonald, Kai Krycki, Philipp Monreal, Edgar Olbrant und Dr. Peter Delmont.

Mein ganz besonderer Dank gebührt meiner Freundin Tina und unserem Sohn Leo, die mir durch ihre Unterstützung geholfen haben, diese Arbeit zu erstellen und vor allem die „letzten zwei Wochen“ der Arbeit auf viel gemeinsame Zeit verzichten mussten.

Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit wird ein Problem der solarthermischen Energieerzeugung untersucht. Das interdisziplinär angelegte Thema befasst sich mit der Strömung von Wasser im Absorberrohr eines Solar-Kraftwerks.

Es wird ein Modell entwickelt, welches die Zweiphasenströmung im Rohr unter Berücksichtigung von Druckverlusten, Reibungswärme und der solaren Einstrahlung beschreibt. Das Modell basiert auf dem System der eindimensionalen Euler-Gleichungen mit Quelltermen und der Wärmeleitungsgleichung, das durch die Verwendung von Zustandsgleichungen geschlossen wird. Mittels einer Dimensionsanalyse werden mögliche Vereinfachungen der Gleichungen aufgezeigt und anschließend das System in ein quasilineares Transportgleichungssystem mit fünf partiellen Differentialgleichungen überführt.

Anhand der Finite Volumen Methode erfolgt eine numerische Lösung des Gleichungssystems. Da das System in der nichtkonservativen Form vorliegt, können die allgemein üblichen Verfahren wie beispielsweise das Lax-Wendroff oder MUSCL-Schema nicht verwendet werden. Stattdessen wird ein pfadkonservatives Verfahren erster Ordnung angesetzt. Die Erweiterung auf dritte Ordnung geschieht durch Einarbeitung des ADER Ansatzes unter Verwendung des WENO Schemas.

Zur Simulation wird die numerische Lösung in einer Software unter C++ umgesetzt. Die Validierung der Software erfolgt mit der Lösung bekannter Probleme wie beispielsweise der Advektionsgleichung oder der Flachwassergleichungen. Simulationsrechnungen von extern definierten Rohrströmungsszenarien zeigen die Effektivität der numerischen Lösung.

Inhaltsverzeichnis

Symbolverzeichnis	6
1 Einleitung	8
1.1 Hintergrund	8
1.2 Ziele der Arbeit	9
1.3 Grundlagen der solaren Energietechnik	10
1.3.1 Linienfokussierende Kollektorsysteme	12
1.3.2 Verdampfungskonzepte solarthermischer Kraftwerke	13
1.3.3 Begrifflichkeiten der Strömungslehre und Thermodynamik	17
2 Modellierung der Thermodynamischen Rohrströmung	21
2.1 Absorberrohr	21
2.2 Wärmeübergang der Rohrwand	22
2.3 Strömung im Absorberrohr	24
2.4 Verwendung von Abschlußgleichungen	30
2.5 Dimensionsanalyse des Thermodynamischen Modells	33
2.6 Charakteristiken des Strömungssystems	37
3 Numerische Lösung des Rohrströmungs-Modells	39
3.1 Finite-Volumen Methoden	39
3.2 Schema der Transportgleichung	43
3.2.1 Form der quasilinearen Transportgleichung	43
3.2.2 Roe Schema	45
3.3 Verfahren erster Ordnung	47
3.4 Erweiterung zu höheren Ordnungen	48
3.5 Verfahren dritter Ordnung	52

3.6	Simulation akademischer Probleme zur Verifikation	56
3.6.1	Advektionsgleichung	56
3.6.2	Flachwassergleichungen	59
3.6.3	Euler-Gleichungen der Gasdynamik	62
4	Simulationssoftware	64
4.1	Struktur und Aufbau der Simulationssoftware	64
4.1.1	Schnittstellen und Steuerung	64
4.1.2	Basisklasse <code>fvm</code>	67
4.1.3	Unterklasse <code>pipe</code>	69
4.1.4	Modul <code>linearalgebra</code>	71
4.1.5	Modul <code>fluid</code>	72
4.2	Beispielcode	76
5	Simulationsergebnisse	79
5.1	Simulationsprogramm ColSimQT vom Fraunhofer ISE	79
5.2	Simulationsprogramm DissDyn vom DLR	80
5.3	Simulationsszenarien	81
5.3.1	Vorwärmmodus mit beginnender Verdampfung	82
5.3.2	Verdampfungsmodus	86
5.3.3	Überhitzungsmodus	90
5.3.4	Kombination einer ein- und zweiphasigen Strömung	94
5.4	Bewertung der Simulationsergebnisse	96
6	Zusammenfassung und Ausblick	97
	Literaturverzeichnis	99
	Eigenständigkeitserklärung	104

Symbolverzeichnis

Griechische Symbole

α	Wärmeübergangskoeffizient	W/(m ² K)
η	Wirkungsgrad	–
η	Dynamische Viskosität	kg/(m s)
λ	Wärmeleitfähigkeit	W/(m K)
ρ	Dichte	kg/m ³
τ	Reibungskräfte	Pa/m
ξ	Druckverlustbeiwert	–

Lateinische Symbole

A	Fläche	m ²
D	Dicke	m
R	Rauheit	m
T	Temperatur	K
U	Umfang	m
V	Volumen	m ³
b	Breite	m
c	Schallgeschwindigkeit	m/s
c_p	Spezifische Wärmekapazität bei konstantem Druck	J/(kg K)
h	Spezifische Enthalpie	J/kg
k	Wärmedurchgangskoeffizient	W/(m ² K)
l	Länge	m
m	Masse	kg
\dot{m}	Massenstrom	kg/s

Symbolverzeichnis

p	Druck	Pa
\dot{q}	Wärmestromdichte	W/m ²
r	Radius	m
t	Zeit	s
u_1	Wärmeverlust-Koeffizient	W/(m K)
u_4	Wärmeverlust-Koeffizient	W/(m K ⁴)
v	Strömungsgeschwindigkeit	m/s
\dot{x}	Massenstrombezogener Dampfgehalt	–
x	Ort	m

Indizes

Index _{boil}	Zustand auf der Siedelinie
Index _{cond}	Zustand auf der Taulinie
Index _{coll}	Kollektor
Index _{dir}	Direktstrahlung
Index _{ext}	Außenseite des Stahlrohres
Index _g	gasförmig
Index _{int}	Innenseite des Stahlrohres
Index _ℓ	flüssig
Index _{loss}	Verluste der optischen Strahlung
Index _{opt}	Optische Strahlung
Index _{wand}	Wand des Stahlrohres

KAPITEL 1

Einleitung

1.1 Hintergrund

Durch die Verabschiedung von Einspeisegesetzen und den Aufbau eines Emissionshandelssystems in den EU-Mitgliedsstaaten haben die Entwicklung und der Einsatz erneuerbarer Energietechnik stark zugenommen. Das EU-Klimapaket von Dezember 2008¹ setzt das ehrgeizige Ziel der EU, den Anteil der Regenerativen an der gesamten Stromerzeugung bis zum Jahre 2020 auf 20 Prozent zu steigern. Damit führt die regenerative Energieerzeugung längst kein Nischendasein mehr unter den Stromerzeugern, sondern stellt eine ernsthafte Alternative dar, vor allem zu Zeiten knapper werdender Ölreserven und des Klimawandels.

Eine Möglichkeit der regenerativen Energieerzeugung bieten solarthermische Kraftwerke. Das Prinzip erscheint recht simpel: Spiegel bündeln Sonnenstrahlen, um Wasser zu erhitzen, der entstehende Dampf treibt Turbinen an, wodurch Strom gewonnen wird. Solarthermische Kraftwerke bieten mehrere Vorteile: Sie bieten die Möglichkeit, im großen Stil Energie zu speichern. Somit kann der Strom zum Beispiel auch nachts zur Verfügung gestellt werden. Darüber hinaus funktionieren sie ähnlich wie konventionelle Dampfkraftwerke (z.B. Kohlekraftwerke). Damit können die hier langjährig gesammelten Erfahrungen ebenfalls für solarthermische Kraftwerke genutzt werden.

Solarthermische Kraftwerke sind seit Jahrzehnten erprobt. Bereits in den achtziger Jahren wurden in Kalifornien die ersten Parabolspiegel-Kraftwerke gebaut. Aber noch ist Solarthermie nicht so kosteneffizient wie Kohle oder Kernkraft.

¹EU-Klimapaket von 2008: Richtlinien über erneuerbare Energien, die dritte Phase des Emissionshandelssystems, etc. Quelle: <http://www.europarl.europa.eu/>

Solarthermische Kraftwerke zur Stromerzeugung lohnen sich laut Ehrenberg [13] nicht im sonnenarmen Mitteleuropa. Jedoch in sonnenreichen Regionen wie Südspanien, Nordafrika oder dem Nahen Osten hat die Technik großes Potential (siehe Abbildung 1.1). Beispielsweise entwickelte eine Vereinigung von Wissenschaftlern das Desertec-Konzept, wonach riesige Spiegelkraftwerke in der Sahara theoretisch genug Strom für den Bedarf der gesamten Welt decken könnten. Spätestens seitdem sich Mitte 2009 ein Konsortium von mehreren Großkonzernen wie die Deutsche Bank, Siemens oder RWE zur Desertec Industrial² Initiative zusamm tat, erscheint eine Umsetzung des Konzepts immer wahrscheinlicher. Das Ziel der Initiative ist die Deckung von 15 Prozent des europäischen Bedarfs mit Strom aus der Wüste bis zum Jahr 2050.

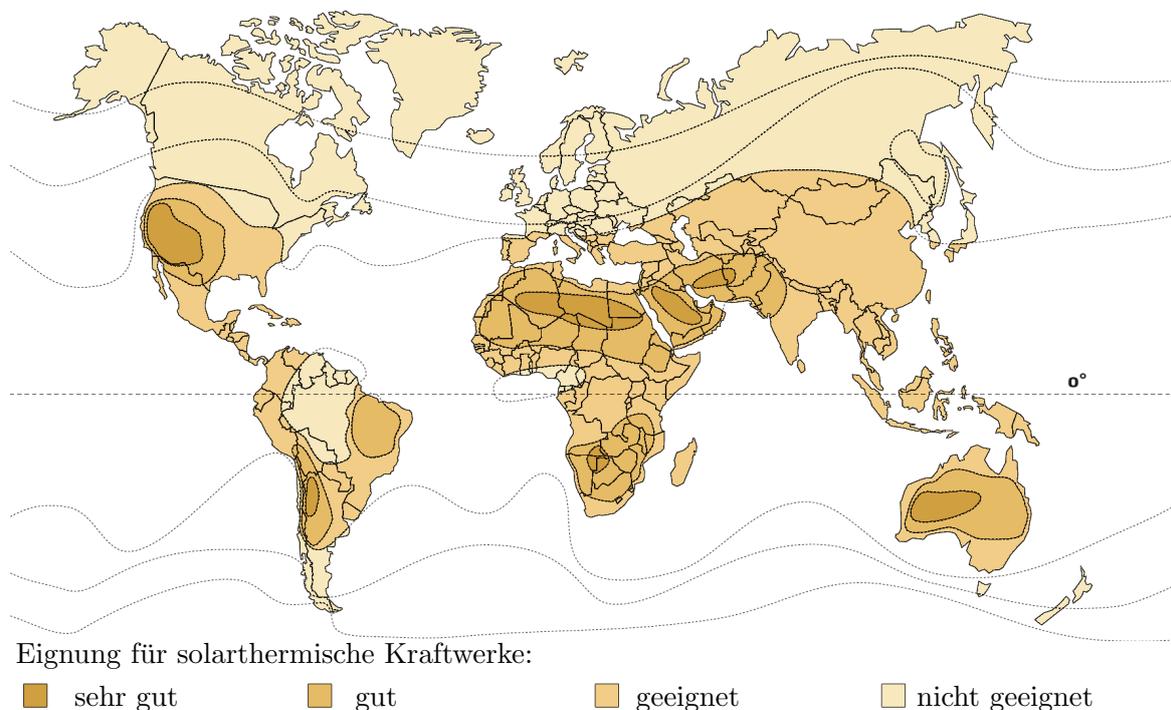


Abbildung 1.1: Sonnengürtel der Erde [33].

1.2 Ziele der Arbeit

Ein solarthermisches Kraftwerk besteht im Wesentlichen aus zwei Subsystemen: dem Solarblock, der die Sonnenenergie aufnimmt und dem Kraftwerksblock, der diese in

²Desertec Industrial: <http://www.desertec.org/>

Strom umwandelt. Die Aufnahme der Sonnenenergie erfolgt dabei über die Verdampfung von Wasser. Für die Verdampfung gibt es zwei Konzepte: die *indirekte* und die *direkte Verdampfung*. Während bei der indirekten Verdampfung das durch den Solarblock strömende Fluid ausschließlich in flüssiger oder in gasförmiger Phase vorkommt, tritt bei der Direktverdampfung auch ein Gemisch aus flüssiger und gasförmiger Phase auf.

Ziel dieser Diplomarbeit ist die dynamische Modellierung der Strömung in einem direktverdampfenden Kollektorsystem, bei dem Wasser als Wärmeträgermedium verwendet wird. Bei der Modellierung werden Druckverluste, Reibungswärme und die solare Einstrahlung berücksichtigt. Die Strömungsvorgänge im Absorberrohr sollen streng mathematisch beschrieben und untersucht werden. Mit einer geeigneten numerischen Methode soll das transiente Verhalten der Rohströmung beschrieben und in Form einer Simulationssoftware umgesetzt werden.

Die vorliegende Arbeit ist folgendermaßen gegliedert: Im Folgenden werden benötigte energietechnische Grundlagen beschrieben. In Kapitel 2 wird die Strömung durch das Absorberrohr und der Wärmeübergang von der Rohrwand auf das Fluid durch ein System partieller Differentialgleichungen modelliert. Dieses Transportgleichungssystem wird in Kapitel 3 numerisch gelöst. In Kapitel 4 wird die im Rahmen dieser Arbeit entwickelte Simulationssoftware vorgestellt, die das transiente Verhalten der solaren Rohrströmung abbildet. Im abschließenden Kapitel 6 werden die Ergebnisse dieser Arbeit zusammengetragen und Ausblicke bezüglich weiterer Untersuchungen gegeben.

1.3 Grundlagen der solaren Energietechnik

Solarthermische Kraftwerke funktionieren ähnlich wie Kohle- und Atomkraftwerke. Sie alle nutzen einen *Wasser-Dampf-Kreislauf* zur Stromerzeugung (siehe Abbildung 1.2) und unterscheiden sich lediglich durch die Wärmequelle, wo der notwendige Wasserdampf für den Betrieb der Dampfturbine erzeugt wird. In der Wärmequelle wird die Temperatur und das spezifische Volumen des Dampfes erhöht. Der Dampf strömt in die Dampfturbine, wo er einen Teil seiner zuvor aufgenommenen Energie als Bewegungsenergie an die Turbine abgibt. An die Turbine ist ein Generator angekoppelt,

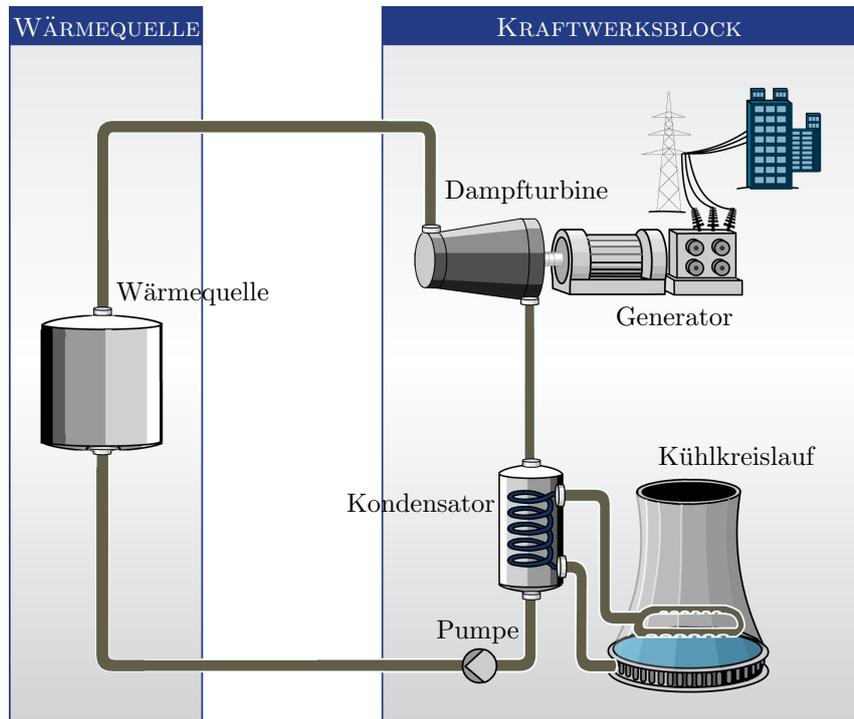


Abbildung 1.2: Schematischer Aufbau eines Dampfkraftwerks [32].

der die mechanische Leistung in elektrische Leistung umwandelt. Danach strömt der entspannte und abgekühlte Dampf in den Kondensator, wo er wieder flüssig wird. Durch die Verflüssigung des Dampfes wird ein großer Teil der zuvor aufgenommenen Wärmeenergie irreversibel an die Umgebung abgegeben. Anschließend kann das Wasser zu der Wärmequelle gepumpt und erneut erhitzt werden. Wasser-Dampf-Kreisläufe sind thermodynamische Kreisprozesse, die Zahoransky [40] als Prozesse beschreibt bei denen Wasser thermodynamische Zustandsänderungen durchläuft und wieder auf seinen ursprünglichen Zustand zurückgeführt wird.

Die Aufgabe von Dampfkraftwerken ist also die Umwandlung von Wärmeenergie in mechanische Energie und anschließend in elektrischen Strom. Ziel ist, dass möglichst viel der Wärmeenergie in elektrische Energie umgewandelt wird. Der Anteil der erzeugten elektrischen Energie an der zugeführten Wärmeenergie wird *Wirkungsgrad* genannt.

Solarthermische Dampfkraftwerke basieren auf der Idee, die direkte Sonnenstrahlung gebündelt als Wärmequelle zu nutzen. Sie verwenden Spiegel (Reflektoren), um das

einfallende Sonnenlicht auf einem so genannten Absorber zu bündeln. Durch den Absorber strömt ein Wärmeträger, der mit der eingefangenen Sonnenergie aufgeheizt wird. Die Erhitzung des Wärmeträgers durch die gebündelte Sonnenstrahlung bildet also die Wärmequelle des Wasser-Dampf-Kreislaufes.

1.3.1 Linienfokussierende Kollektorsysteme

Die Reflektoren des Kollektorsystems werden dem Stand der Sonne nachgeführt um die solare Strahlung zu konzentrieren. Bezüglich des Konzentrationsprinzips des Sonnenlichtes lassen sich Kollektorsysteme in zwei unterschiedliche Kategorien unterteilen [27]:

- Bei *Punktfokussierenden* Systemen, wie Solartürmen oder Solar Dish Systemen, erfolgt die Konzentration der solaren Strahlung auf einen Fokuspunkt über zweiachsig nachgeführte Spiegel.
- *Linienfokussierende* Systeme, wie Parabolrinnen oder Fresnel-Kollektoren, werden einachsig der Sonne nachgeführt und bündeln die solare Strahlung auf Absorberrohre die sich in der Brennlinie befinden.

Im Rahmen dieser Arbeit betrachten wir nur linienfokussierende solarthermische Kraftwerke.

Parabolrinnen-Kraftwerke

Parabolrinnenkollektoren bestehen aus parabolisch gewölbten Spiegeln, die das Sonnenlicht auf ein in der Brennlinie verlaufendes Absorberrohr bündeln (siehe Abbildung 1.3). Die Parabolrinne gleicht im Querschnitt einer Parabel und hat damit die Eigenschaft, parallel einfallende Strahlung in einem Brennpunkt zu fokussieren (siehe Abbildung 1.4).

Die Öffnung der Parabel (Apertur) misst in heutigen Kraftwerken zwischen fünf und sechs Metern. In der Brennlinie befindet sich ein hochselektiv beschichtetes Stahlrohr, das die Strahlung absorbiert. Hochselektiv bedeutet, dass es sowohl Sonnenstrahlung (kurzwelliges Licht) gut absorbiert als auch wenig Wärmestrahlung (langwelliges Licht) abgibt. Um Wärmeverluste zu verringern, ist das Absorberrohr in ein vakuumdichtes

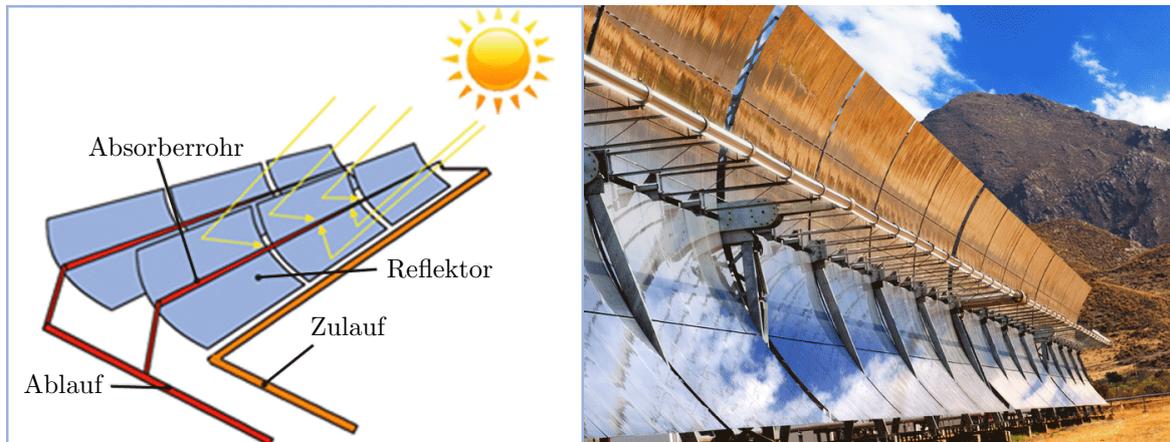


Abbildung 1.3: Parabolrinnenkraftwerk. Links schematische Darstellung, rechts eine kommerziell betriebene 50 MW-Anlage in Spanien. Quelle: DLR

Glasrohr eingebettet. Die vom Absorberrohr aufgenommene Wärmeenergie wird durch die Rohrwand an das Wärmeträgermedium übertragen.

Fresnel-Kollektor-Kraftwerke

Fresnel-Kollektor-Kraftwerke bündeln ebenfalls das Sonnenlicht auf ein in der Brennlinie verlaufendes Absorberrohr. Im Unterschied zu den Parabolrinnenkollektoren setzen sich die Fresnel-Kollektoren aus mehreren parallelen, ungewölbten Spiegelreihen zusammen. Nach Morin [28] liegt die Spiegelbreite der einzelnen Spiegelfacetten zwischen einem halben bis zwei Metern.

Das Sonnenlicht wird über mehrere einachsige gelagerte Spiegelreihen auf ein Absorberrohr gebündelt. Da die Optik der Reflektoren zu einer geweiteten Brennlinie führt, verfehlen einige der ankommenden Strahlen den Absorber. Mit Hilfe eines zusätzlich angebrachten Sekundärspiegels hinter dem Rohr, kann diese Strahlung auch noch auf das Absorberrohr gelenkt werden (siehe Abbildung 1.5).

1.3.2 Verdampfungskonzepte solarthermischer Kraftwerke

Bei solarthermischen Dampfkraftwerken gibt es das Konzept der *indirekten* und der *direkten Verdampfung*. Bei der indirekten Verdampfung wird ein Zweikreisssystem verwendet: Kollektorkreislauf und Kraftwerkskreislauf. Im Kollektorkreislauf wird die von dem Solarfeld aufgefangene Solarstrahlung von einem Wärmeträgermedium aufge-

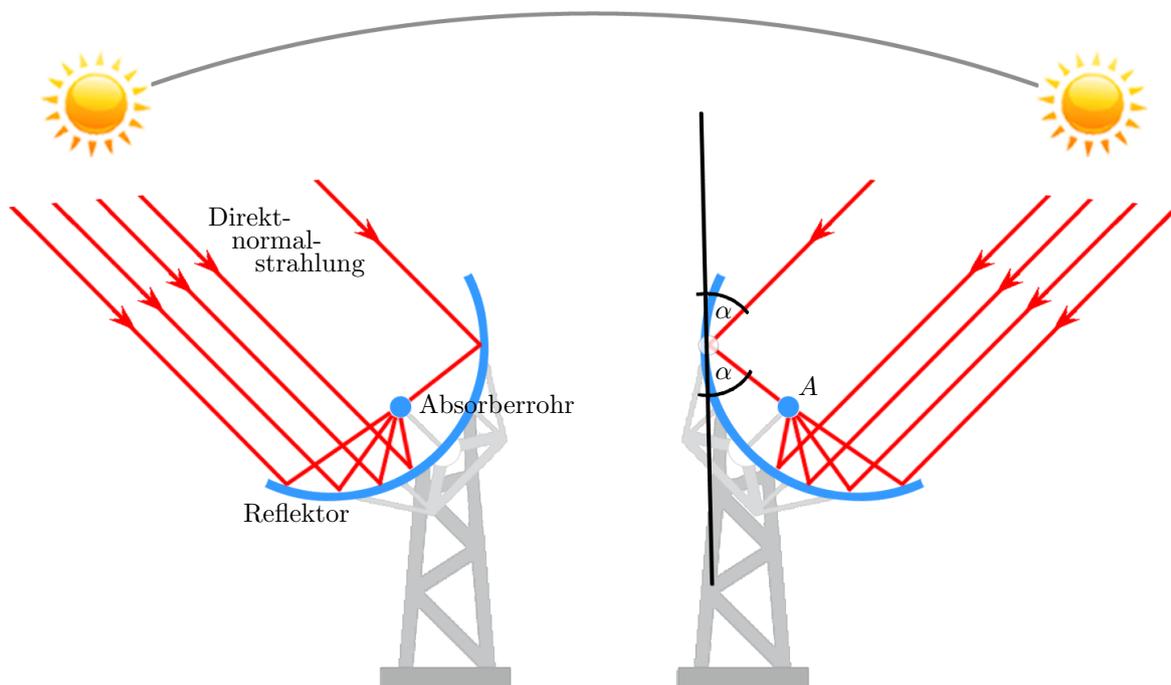


Abbildung 1.4: Der Kollektor wird dem Sonnenstand nachgeführt um eine Eigenschaft seiner Spiegelform auszunutzen: Strahlen die parallel zur Achse einfallen, werden durch die Spiegelung an der Parabel im Brennpunkt A (dem Absorberrohr) gebündelt. Eine Parabel mit der Gleichung $y = ax^2$ für $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ hat den Brennpunkt $A(0, |\frac{1}{4a}|)$, vgl. [35].

nommen und anschließend die Wärme über Wärmetauscher an einen konventionellen Wasser-Dampf-Kreislauf abgegeben (siehe Abbildung 1.6). Als Wärmeträgermedium wird entweder Thermoöl oder Salzschnmelze verwendet [2]. Die Strömung im Kollektorkreislauf wird *einphasig* betrieben, so dass das Wärmeträgermedium nur in flüssiger Form vorkommt. Damit gibt die Siedetemperatur des Wärmeträgermediums die maximal zulässige Temperatur für diesem Kreislauf vor. Alle bislang kommerziell betriebenen solarthermischen Kraftwerke basieren auf diesem Zweikreissystem.

Eine technische Weiterentwicklung dieses Konzepts ist die *Direktverdampfung*, bei der Wasser als Wärmeträgermedium durch den Absorber strömt und verdampft, wodurch im Absorberrohr eine sog. *zweiphasige Strömung* vorliegt. Dies ermöglicht somit die direkte Kopplung der Kollektoren mit der Turbine. Der Vorteil *direktverdampfender* Kollektorfelder besteht vor allem in der Wirkungsgradsteigerung durch Anhebung der Prozesstemperatur, da diese nicht mehr durch die Siedetemperatur beschränkt wird. Ein weiterer Vorteil ist die Verringerung der Investitionskosten, da das teure Thermoöl

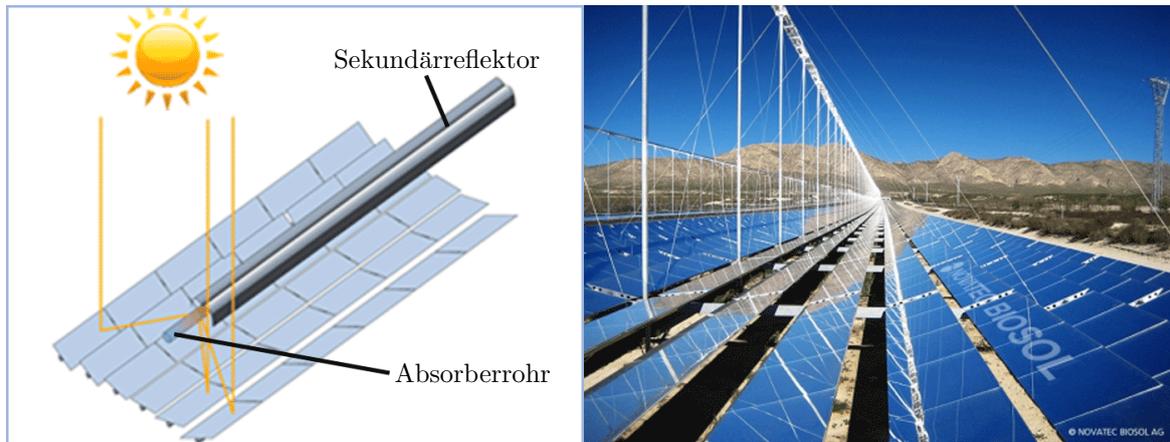


Abbildung 1.5: Fresnel-Kollektor-Kraftwerk. Links schematische Darstellung, rechts eine 1,4 MW Testanlage in Calasparra. Quelle: Novatec-Solar

durch Wasser ersetzt wird und Komponenten wie Wärmetauscher nicht mehr verwendet werden.

In Anlehnung an konventionelle Dampfkraftwerke werden auch beim Konzept der Direktverdampfung drei unterschiedliche *Betriebskonzepte* untersucht. Wie aus Abbildung 1.7 hervorgeht, wird zwischen den drei Betriebsarten *Zwangsdurchlauf*, *Einspritzkonzept* und *Rezirkulationskonzept* unterschieden.

- Beim *Zwangsdurchlauf* wird das am Strang Eintritt zugeführte Speisewasser vorgewärmt, verdampft und anschließend überhitzt. In Folge von Einstrahlungsschwankungen kann sich hierbei der Verdampfungsendpunkt verschieben, was aufgrund des Temperaturschocks extreme thermodynamische Belastungen der Absorberrohre im betroffenen Bereich zur Folge hat. Da die Länge der Verdampfungszone gleichzeitig die Überhitzerlänge bestimmt, resultieren aus zeitlichen Schwankungen entsprechende ungewünschte Reaktionen in der Dampftemperatur am Strangaustritt. Die Dampftemperatur kann nur durch aufwendige Regelung von Einspritzkühlern konstant gehalten werden.
- Beim regelungstechnisch sehr anspruchsvollem *Einspritzkonzept* wird an vielen Stellen des Kollektors gerade so viel Wasser eingespritzt, wie im folgenden Abschnitt verdampfen kann. Damit lässt sich die zugeführte Wärmemenge sehr genau der solaren Einstrahlung anpassen.
- Beim *Rezirkulationskonzept* wird der Kollektorstrang durch einen Dampfabschei-

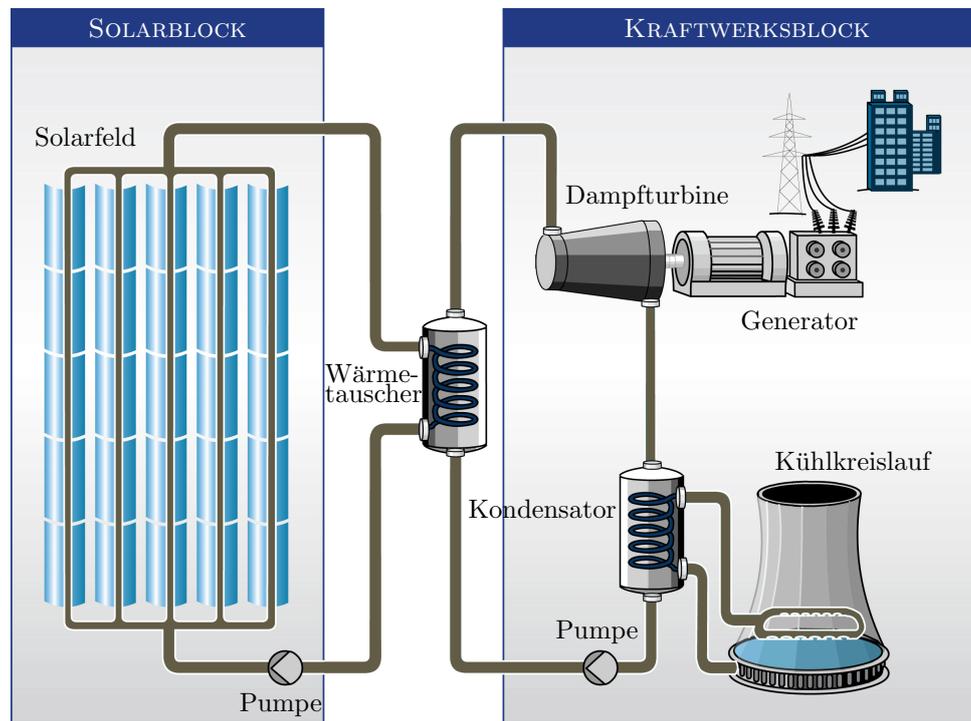


Abbildung 1.6: Schematischer Aufbau eines solarthermischen Kraftwerks mit Zweikreissystem. Spiegel bündeln Sonnenstrahlen, um ein Wärmemedium zu erhitzen, der im Wärmetauscher entstehende Dampf treibt Turbinen an, wodurch Strom gewonnen wird [32].

der in zwei Bereiche unterteilt. Der Betrieb des Verdampferabschnitts erfolgt mit Wasserüberschuss, um zu gewährleisten dass der Verdampfungsdruck nicht in diesem Abschnitt liegt. Der Verdampfungsdruck wird im Dampfabscheider fixiert, in dem Flüssig- und Dampfphase getrennt wird. Während das abgeschiedene Wasser dem Strang am Eintritt wieder zugemischt wird, wird im anschließenden Überhitzerabschnitt der Dampf überhitzt.

Im Rahmen des DISS-Projektes³ wurden diese Betriebsarten auf der Plataforma Solar in Almería (Spanien) untersucht. Die Untersuchungen zeigten, dass das Rezirkulationskonzept die geeignetste Betriebsart für die Direktverdampfung ist [41].

Laut Hirsch [18] bieten sich bei der Solarfeldverschaltung zwei grundsätzliche Varianten für das Rezirkulationskonzept an, das *verteilte* und das *zentrale* Rezirkulationskonzept. Beim zentralen Rezirkulationskonzept (siehe Abbildung 1.8) wird die zweiphasige

³DISS-Projekt: Direct Solar Steam, Testanlage von der EU-gefördertes Projekt zur Untersuchung ausgewählter Betriebskonzepte der Direktverdampfung bei Parabolrinnen

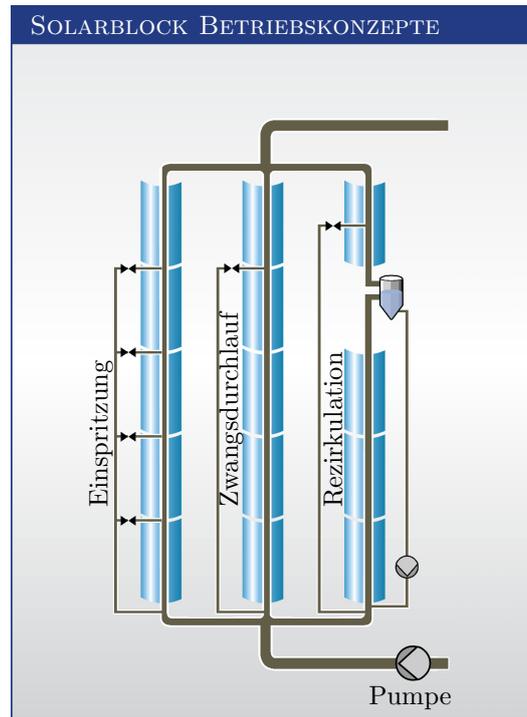


Abbildung 1.7: Die drei verschiedenen Betriebsarten eines direktverdampfenden solarthermischen Kraftwerks.

Strömung am Austritt der Verdampferabschnitte über einen Sammler der zentral angeordneten Abscheidetrommel zugeführt. Der Sattdampf wird von dort aus auf die Überhitzer verteilt. Das verteilte Rezirkulationskonzept (siehe Abbildung 1.9) sieht kompakte Dampfabscheider in jedem Strang vor. Das Wasser fließt in den Puffertank, während der Dampf überhitzt wird und dem Kraftwerksblock zugeführt wird in dem mit einem Dampfturbinengenerator Strom erzeugt wird. Das im Kraftwerksblock bzw. Kondensator kondensierte Wasser wird anschließend zusammen mit dem Wasser aus dem Puffertank durch das Solarfeld rezirkuliert, womit der Kreislauf geschlossen ist. Dieses Konzept führt zu geringeren Druckverlusten im Feld und damit zu reduzierter Pumpleistung.

1.3.3 Begrifflichkeiten der Strömungslehre und Thermodynamik

In diesem Abschnitt werden einige aus der Strömungslehre [17] und Thermodynamik [34] stammende Begrifflichkeiten erläutert.

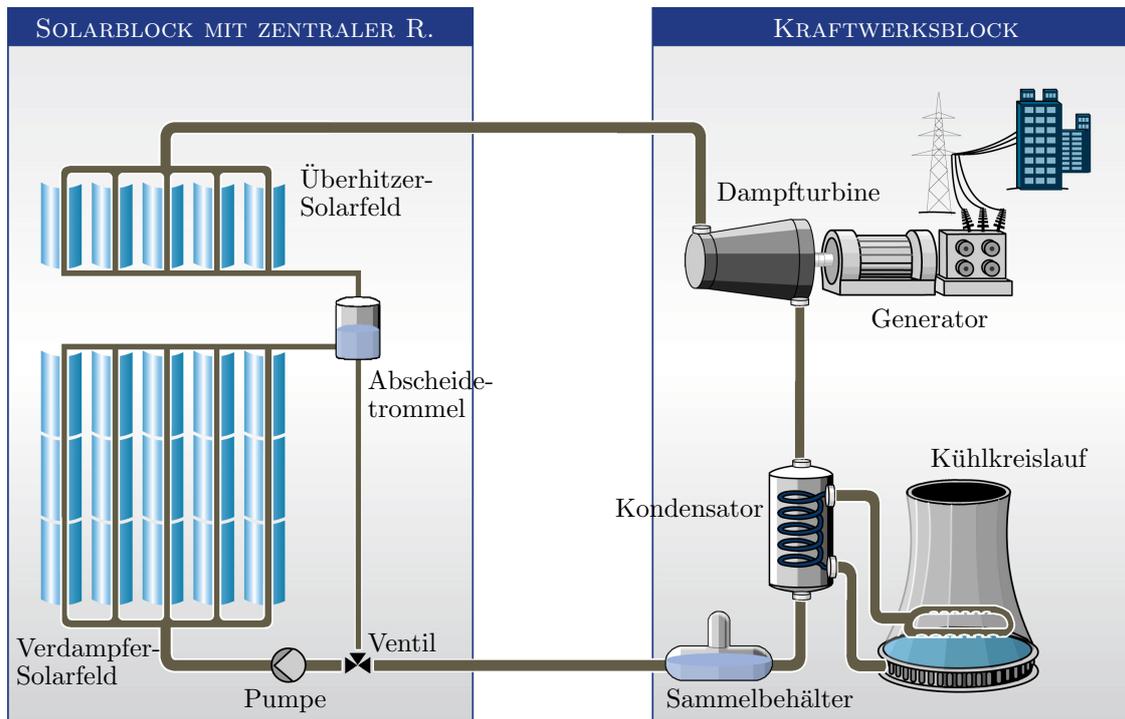


Abbildung 1.8: Schematischer Aufbau eines solarthermischen Kraftwerkes mit zentraler Rezirkulation [32].

Zustandsgrößen und Gibbsche Phasenregel

Zustandsgleichungen stellen einen stoffspezifischen Zusammenhang zwischen thermodynamischen Zustandsgrößen dar. Ein thermodynamisches System, welches aus einer oder mehreren Phasen besteht, ist im thermodynamischen Gleichgewicht durch eine gewisse Anzahl von *Zustandsgrößen* eindeutig bestimmt.

Die Zustandsgrößen eines Systems sind nicht alle voneinander unabhängig. Die Zahl der unabhängig veränderbaren Zustandsgrößen, d. h. die Zahl F der Freiheitsgrade, hängt von der Zahl K der Komponenten im System und der Zahl P der verschiedenen Phasen ab und ist gegeben durch die sog. *Gibbssche Phasenregel* (1876):

$$F = K - P + 2$$

Wärmeleitgesetz nach Fourier

In einem Feststoff findet infolge von Temperaturunterschieden ein Wärmefluss statt. Die Wärme in dem Feststoff fließt (gemäß des zweiten Hauptsatzes der Thermodyna-

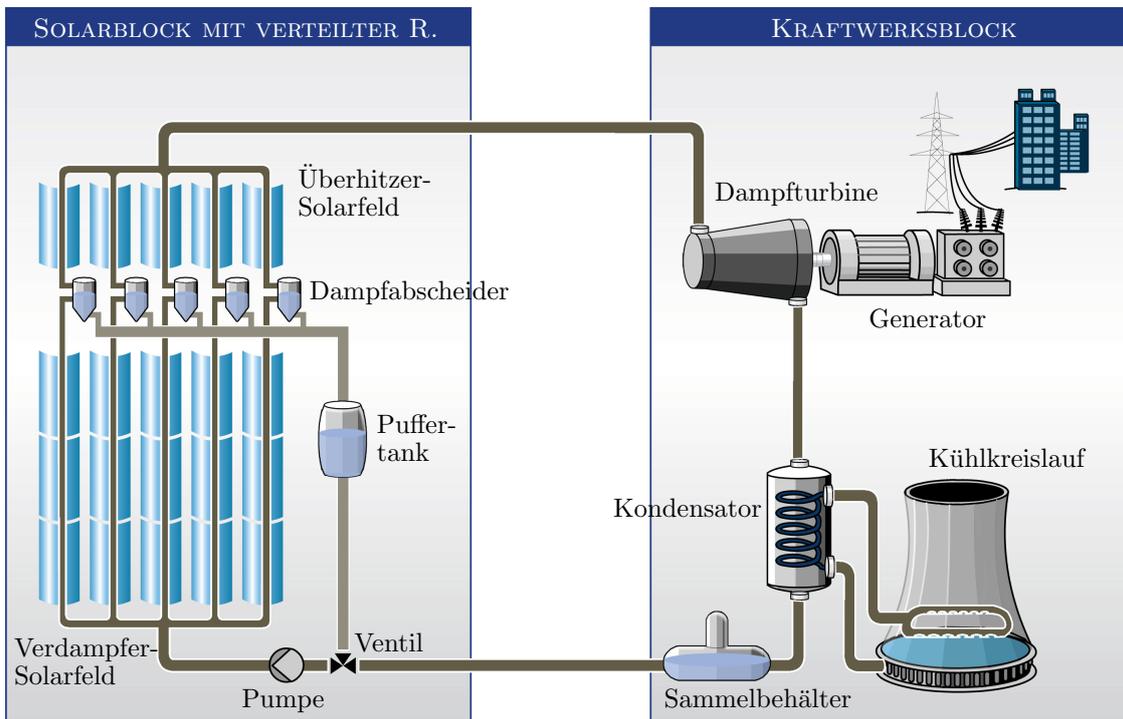


Abbildung 1.9: Schematischer Aufbau eines solarthermischen Kraftwerkes mit verteilter Rezirkulation [32].

mik) in Richtung der geringeren Temperatur. Aufgrund des Energieerhaltungssatzes geht dabei keine Wärmeenergie verloren. Die durch *Wärmeleitung* übertragene Wärmeleistung \dot{Q} wird durch das *1. Fouriersche Gesetz* (1822) beschrieben, das für den vereinfachten Fall eines festen Körpers mit zwei parallelen Wandflächen lautet:

$$\dot{Q} = \frac{\lambda}{D} \cdot A \cdot (T_{w1} - T_{w2})$$

Dabei bezeichnen T_{w1} und T_{w2} die Wandtemperaturen, λ die Wärmeleitfähigkeit des Körpers, D die Dicke des Körpers gemessen von Wand zu Wand und A die Fläche durch die die Wärme strömt.

Massenstrom

Der Massenstrom \dot{m} ist in der Strömungslehre definiert durch das Produkt aus der Dichte ρ und Geschwindigkeit v des Mediums sowie der Querschnittsfläche A :

$$\dot{m} = \rho \cdot v \cdot A$$

Reynolds-Zahl

Die *Reynolds-Zahl* ist eine Kennzahl zur Beurteilung reibungsbehafteter Strömungsvorgänge. An einem Strömungsteilchen greifen im allgemeinen Druckkräfte und Reibungskräfte an. Die Reynolds-Zahl gibt das Verhältnis der angreifenden Kräfte an. Aus der Reynolds-Zahl kann erkannt werden, ob eine Strömung *laminar* (Reynolds-Zahl ist kleiner als die kritische Reynolds-Zahl) oder *turbulent* (größer als die kritische Reynolds-Zahl) fließt. Die kritische Reynolds-Zahl kann nur empirisch ermittelt werden und ist z.B. bei der Strömung von Wasser in einem glatten Rohr ca. 2300. Die Reynolds-Zahl wird berechnet nach:

$$\text{Re}_\kappa = \frac{2 \cdot r_\kappa \cdot \rho \cdot v}{\eta}$$

Es bezeichnet ρ die Dichte des Fluides, v die Strömungsgeschwindigkeit, $2 \cdot r_\kappa$ den Rohrdurchmesser und η die dynamische Viskosität des Fluides.

Prandtl-Zahl

Die *Prandtl-Zahl* entspricht dem Verhältnis zwischen der durch innere Reibung (Viskosität) erzeugten Wärme und der abgeführten Wärme in einer Strömung. Sie ist temperaturabhängig und nimmt bei Flüssigkeiten mit steigender Temperatur ab.

$$\text{Pr} = \frac{\eta \cdot c_p}{\lambda}$$

Es bezeichnet η die dynamische Viskosität des Fluides, λ die Wärmeleitfähigkeit des Fluides und c_p die spezifische Wärmekapazität bei konstantem Druck.

Modellierung der Thermodynamischen Rohrströmung

In der vorliegenden Arbeit wird ein linienfokussierendes Kollektorsystem betrachtet, in dem durch verteilte Rezirkulation (siehe Abbildung 1.9) der Wärmeträger Wasser direkt verdampft wird. Das entwickelte Modell beschreibt allgemein die solar erhitze Rohrströmung durch ein Absorberrohr, so dass es wahlweise einen Kollektorstrang im Verdampfer- oder Überhitzer-Solarfeld abbilden kann. Das Modell basiert auf den Euler-Gleichungen und einer Wärmeübergangs-Gleichung.

2.1 Absorberrohr

Der Absorberstrang in einem Kollektorfeld entspricht einem Stahlrohr mit absorbierenden Überzug, das eine Außenquerschnittsfläche von A_{ext} und eine Innenquerschnittsfläche von A_{int} besitzt. An die Rohrwand des Stahlrohres ist die äußere (solare) Wärmestromdichte \dot{q}_{ext} aufgeprägt. Das Fluid, welches im Inneren des Rohres strömt, ist mit der Rohrwand über die innere Wärmestromdichte \dot{q}_{int} gekoppelt, die sich aus der Rohrwandtemperatur T_{wand} ergibt (siehe Abb. 2.1).

Die Modellierung der Rohrströmung in einem solar beheiztem Absorberrohr besteht aus der Beschreibung für die Strömung im Inneren des Rohres sowie der Beschreibung des Wärmeübergangs von der Rohrwand zum Fluid. Der Wärmeübergang von der Rohrwand zum Fluid wird durch die Energiebilanz der Rohrwand modelliert (Ab-

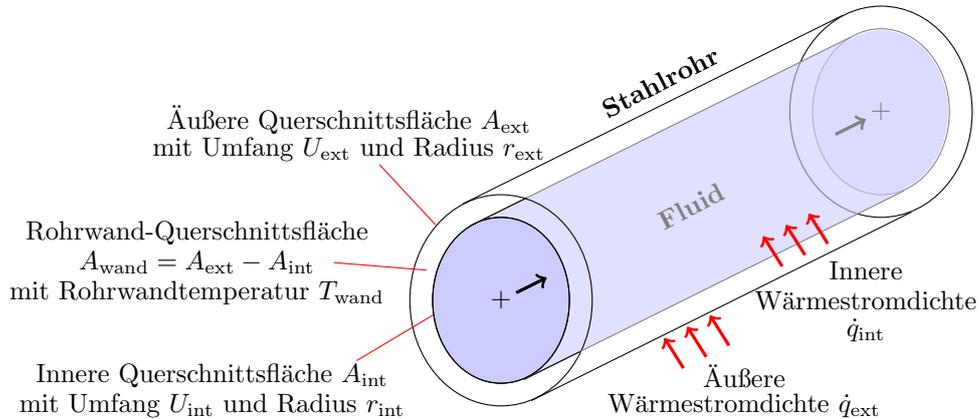


Abbildung 2.1: Größen zur physikalischen Beschreibung eines Absorberrohrabschnittes.

schnitt 2.2). Die Strömung im Absorberrohr wird durch die Bilanzgleichungen für Masse, Impuls und Energie beschrieben (Abschnitt 2.3).

2.2 Wärmeübergang der Rohrwand

Die Ausbreitung thermischer Veränderungen eines Körpers durch Wärmeleitung wird durch die *Wärmeleitungsgleichung* nach Fourier beschrieben

$$\frac{\partial T(\vec{r})}{\partial t} = \frac{\lambda}{c_p \cdot \rho} \cdot \nabla^2 T(\vec{r}), \quad (2.1)$$

für die Temperatur T , den Ortsvektor \vec{r} , die Wärmeleitfähigkeit λ , die Dichte ρ und die spezifische Wärmekapazität c_p . Da die thermische Veränderung der Rohrwandtemperatur T_{wand} eines solar beheizten Rohres von mehreren Wärmequellen abhängt, wird die *inhomogene Wärmeleitungsgleichung*

$$c_{\text{wand}} \cdot \rho_{\text{wand}} \cdot \frac{\partial T_{\text{wand}}(\vec{r})}{\partial t} = \nabla \cdot (\lambda_{\text{wand}} \cdot \nabla T_{\text{wand}}(\vec{r})) + \dot{q}(\vec{r}) \frac{U_{\text{int}}}{A_{\text{int}}} \quad (2.2)$$

benötigt. Gem. Lippke [24] lassen sich für die zu modellierende Wärmeübertragung der Rohrwand auf das Fluid im Absorberrohr die folgenden Vereinfachungen treffen:

- Es wird nur eine Raumdimension betrachtet, da die Wärmeleitfähigkeit der Rohrwand in axialer und tangentialer Richtung vernachlässigbar gering ist.
- Der radiale Verlauf der Temperatur in der Rohrwand wird konstant angenommen.

- Die spezifische Wärmekapazität und die Dichte der Rohrwand werden ortsunabhängig angenommen.

Somit wird anstatt das exakte Temperaturfeld zu betrachten nur noch eine *mittlere Temperatur* T_{wand} innerhalb eines Rohrwandquerschnittes angenommen. Gem. [39] ergibt sich die Wandenergiebilanz des dünnwandigen Absorberrohres durch

$$c_{\text{wand}} \cdot \rho_{\text{wand}} \cdot \frac{\partial T_{\text{wand}}}{\partial t} = \dot{q}_{\text{ext}} \frac{U_{\text{ext}}}{A_{\text{wand}}} - \dot{q}_{\text{int}} \frac{U_{\text{int}}}{A_{\text{wand}}}. \quad (2.3)$$

Dabei beschreiben T_{wand} die Rohrwandtemperatur, ρ_{wand} die Dichte des Stahlrohres, c_{wand} die spezifische Wärmekapazität des Stahlrohres sowie \dot{q}_{ext} und \dot{q}_{int} die äußere und innere Wärmestromdichte.

Innere Wärmestromdichte

Die innere Wärmestromdichte \dot{q}_{int} von der Rohrwand zum Fluid lässt sich gemäß der 1. Fourierschen Gleichung als Funktion der Fluidtemperatur T und der Rohrwandtemperatur T_{wand} durch

$$\dot{q}_{\text{int}} = k \cdot (T_{\text{wand}} - T) \quad (2.4)$$

bestimmen, wobei k den Wärmedurchgangskoeffizienten von der Rohrwand auf das Fluid bezeichnet. Der Wärmedurchgangskoeffizient beschreibt die Energieübertragung, die sich aus Wärmeleitung (durch die Rohrwand) und Wärmeübergang (von der Rohrwand auf das Fluid) zusammensetzt. Dieser ergibt sich gem. Böge [1] durch¹

$$k = \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{r_{\text{int}} \cdot \ln \left(\frac{r_{\text{ext}}}{r_{\text{int}}} \right)}{\lambda_{\text{wand}}} \right)^{-1} = \frac{\lambda_{\text{wand}} \cdot \alpha}{\lambda_{\text{wand}} + \ln \left(\frac{r_{\text{ext}}}{r_{\text{int}}} \right) \cdot r_{\text{int}} \cdot \alpha}. \quad (2.5)$$

Es beschreibt α den Wärmeübergangskoeffizienten, der sich nach der Beziehung von Dittus und Boelter [10] durch

$$\alpha = 0.0235 \cdot \frac{\lambda}{2 \cdot r_{\text{int}}} \cdot \text{Re}_{\text{int}}^{0.8} \cdot \text{Pr}^{0.4} \quad (2.6)$$

für den Wärmeleitkoeffizienten λ des Fluids, der Reynolds-Zahl Re_{int} und der Prandtl-Zahl Pr bestimmen lässt.

¹Wärmedurchgangsgleichung Seite F35 (5) mit Wärmeleitungsgleichung für Rohre Seite F32 (2).

Äußere Wärmestromdichte

Die an die Rohrwand aufgeprägte äußere (solare) Wärmestromdichte \dot{q}_{ext} setzt sich aus der zugeführten optischen Bestrahlungsstärke \dot{q}_{opt} abzüglich der an die Umgebung abgegebenen Abstrahlungsstärke \dot{q}_{loss} zusammen:

$$\dot{q}_{\text{ext}} = \underbrace{\frac{b_{\text{coll}}}{U_{\text{ext}}} \cdot \dot{q}_{\text{dir}} \cdot \eta_{\text{opt}} \cdot \eta_{\text{iam}}}_{\dot{q}_{\text{opt}}} - \underbrace{\frac{1}{U_{\text{ext}}} (u_1 T_{\text{wand}} + u_4 T_{\text{wand}}^4)}_{\dot{q}_{\text{loss}}}. \quad (2.7)$$

Für die optische Bestrahlungsstärke \dot{q}_{opt} beschreibt \dot{q}_{dir} die *Direktstrahlung*, die vom Kollektor mit der Aperturweite b_{coll} aufgefangen wird und auf das Absorberrohr mit dem äußeren Umfang U_{ext} aufgeprägt wird. η_{opt} bezeichnet den *optischen Spitzenwirkungsgrad*, wobei die Verringerung der effektiv nutzbaren Strahlung durch schrägen Einfall und Abschattungseffekte der Spiegel durch den *Einfallswinkelmodifikator*² η_{iam} berücksichtigt werden. Für eine detailliertere Beschreibung von η_{opt} und η_{iam} wird auf Morin [28] verwiesen. Die optische Bestrahlungsstärke \dot{q}_{opt} wird auch oft durch die optische Strahlungsstärke q_{opt} (in Watt je Meter Absorberrohr) ausgedrückt mit $\dot{q}_{\text{opt}} = \frac{1}{U_{\text{ext}}} \cdot q_{\text{opt}}$.

Die Abstrahlungsstärke \dot{q}_{loss} lässt sich gem. Burkholder und Kutscher [5] in Abhängigkeit von der Rohrwandtemperatur durch ein Polynom vierten Grades beschreiben. Dabei sind die Wärmeverlust-Koeffizienten u_1 und u_4 spezifische Eigenschaften des Absorberrohres³.

2.3 Strömung im Absorberrohr

Bei der direkten Verdampfung strömt das Wärmeträgermedium zweiphasig durch die Rohre des Solarblocks. Im Folgenden wird ein Modell entworfen, welches zur Abbildung einer zweiphasigen Strömung verwendet werden kann. Durch *makroskopische* Betrachtung der Phasen, werden die Phasen als vollständig durchmischt angenommen, wobei sich jederzeit der Flüssig- und Gasanteil durch bekannte thermodynamische Stoffgleichungen bestimmen lässt. Für das makroskopische Modell werden die folgenden Vereinfachungen getroffen:

²engl.: Incident Angle Modifier

³Gem. Burkholder und Kutscher [5] besitzt das Absorberrohr „Schott PTR70“ die Werte $u_1=0.141$ W/(m²K) und $u_4=6.48$ E-09 W/(m²K⁴).

- Es wird davon ausgegangen, dass sich die Strömung im *thermodynamischen Gleichgewicht* befindet. Für die zweiphasige Wasser-/Dampfströmung bedeutet dies, dass Wasser und Wasserdampf gleichmäßig verteilt sind, womit Wasser und Wasserdampf das gleiche Temperaturniveau besitzen ($T_\ell = T_g$).
- Für die zweiphasige Wasser-Dampfströmung wird der zwischen den beiden Phasen auftretende *Schlupf*⁴ nach Dupont [12] vernachlässigt, so dass sich beide Phasen mit gleicher Geschwindigkeit durch das Rohr bewegen ($v_\ell = v_g$).

Somit lässt sich die Zweiphasenströmung als *homogene Strömung* betrachten, die durch Mischgrößen beschrieben wird. Die Mischgrößen ergeben sich mit dem Dampfgehalt und den Stoffwerten von siedendem Wasser (_{boil}) auf der Siedelinie und kondensierenden Wasserdampf (_{cond}) auf der Taulinie [18]:

$$\begin{aligned}
 h &= h_{\text{boil}} + \dot{x} \cdot (h_{\text{cond}} - h_{\text{boil}}) \\
 \rho &= \left(\rho_{\text{boil}}^{-1} + \dot{x} \cdot (\rho_{\text{cond}}^{-1} - \rho_{\text{boil}}^{-1}) \right)^{-1} \\
 v &= v_\ell = v_g \\
 T &= T_\ell = T_g.
 \end{aligned} \tag{2.8}$$

Die Variablen haben folgende Bedeutung: h beschreibt die spezifische Enthalpie, \dot{x} den Dampfgehalt, ρ die Dichte, v die Geschwindigkeit und T die Temperatur. Der Dampfgehalt $\dot{x} \in [0, 1]$ bestimmt, ob sich das Fluid in der flüssigen Phase ($\dot{x} = 0$), in der dampfförmigen Phase ($\dot{x} = 1$) oder in der Zweiphasenregion befindet ($0 < \dot{x} < 1$) befindet. Im Folgenden werden die partiellen Differentialgleichungen zur Beschreibung der Strömung mit Mischgrößen aufgestellt.

Navier-Stokes Gleichungen

Strömungen lassen sich nach Claude Navier und George Stokes durch die sog. *Navier-Stokes Gleichungen* beschreiben. Sie sind ein System von nichtlinearen partiellen Differentialgleichungen 2. Ordnung und bilden die Grundgleichungen der Strömungsmechanik.

Die *Massenbilanzgleichung* beschreibt die Erhaltung der Masse in einem Kontrollvolumen. Die zeitliche Änderung der Masse infolge von Dichteänderung entspricht der

⁴Schlupf bezeichnet das Abweichen der Geschwindigkeiten zweier in Reibkontakt stehender Fluide.

Summe der ein- und ausfließenden Massenströme

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla(\rho \vec{v}) \quad (\text{Massenbilanz})$$

für die Dichte ρ und den Geschwindigkeitsvektor $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$.

Gem. [39] ist jedes Fluidelement aufgrund seiner Masse und Geschwindigkeit Träger eines Impulses. Dieser Impuls kann nach dem zweiten Newtonschen Axiom nur durch die Wirkung von Kräften verändert werden, die in Form von der Erdbeschleunigung oder der Scherspannungen an der Volumenoberfläche auftauchen. Bilanziert über alle auf das Kontrollvolumen wirkenden Kräfte lautet die *Impulsbilanzgleichung*

$$\frac{\partial \rho \vec{v}}{\partial t} = -\nabla(\vec{v} \otimes (\rho \vec{v})) - \nabla p - (\nabla^\top \mathcal{T})^\top + \rho \vec{g} \quad (\text{Impulsbilanz})$$

Der Term auf der linken Seite beschreibt die zeitliche Änderung der Massenstromdichte, der erste Term auf der rechten Seite stellt die örtliche Änderung des Impulsstromes, der zweite Term die örtliche Änderung des Druckes, der dritte Term die Reibungskraft als Tensor der Scherspannungen \mathcal{T} und der letzte Term die Gravitationskraft \vec{g} .

Wird gem. [39] der erste Hauptsatz der Thermodynamik für Fließprozesse angewandt, so ergibt sich das Gesetz zur Erhaltung der Energie einer realen Strömung. Die zeitliche Änderung der totalen Energie E , bestehend aus innerer und kinetischer Energie des Mediums, ist gleich der Summe der örtlichen Änderung des Energiestroms, dem örtlich zugeführten Wärmestrom, sowie der Leistungen der Gravitationskraft, der Volumenänderung und der Reibungskräfte. Die *Energiebilanzgleichung* lautet somit

$$\frac{\partial E}{\partial t} = -\nabla(\vec{v}E) + \nabla \dot{q} + \rho \vec{v} \vec{g} - \nabla(p\vec{v}) - \nabla(\mathcal{T}\vec{v}). \quad (\text{Energiebilanz})$$

Die Navier-Stokes Gleichungen beschreiben eine reale dreidimensionale Strömung, deren numerische Lösung sehr aufwändig und rechenzeitintensiv ist. Daher werden im Folgenden einige Vereinfachungen getroffen.

Eindimensionale Euler Gleichungen mit Quelltermen

Für die zu betrachtende Rohrströmung in solar erhitzten Absorberrohren können die folgenden vereinfachenden Annahmen getroffen werden:

- Durch das große Verhältnis von Rohrlänge (mehrere hundert Meter) zu Rohrdurchmesser (wenige Zentimeter) des Absorberrohrs wird die Rohrströmung vereinfacht eindimensional betrachtet
- Der Rohrquerschnitt wird konstant angenommen.
- Die Wärmeleitfähigkeit des strömenden Mediums wird normal zur Strömungsrichtung angenommen und axial vernachlässigt.
- Wegen des waagerechten Verlaufs der eindimensionalen Strömung werden die Gravitationskräfte vernachlässigt.
- Die Reibungskräfte werden gem. [39] als Volumenkräfte berücksichtigt. In der Impulsgleichung ergibt sich dadurch ein Druckverlustterm τ . Für die Energiebilanz bedeutet dies, dass die gesamte Reibungsarbeit dem Fluid als Wärme zugeführt wird, so dass der Term der Schubkräfte verschwindet.

Durch die Annahmen ergeben sich aus den Navier-Stokes Gleichungen die nach Leonhard Euler benannten eindimensionalen *Euler-Gleichungen* mit Quelltermen:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial x} = 0 \quad (2.9a)$$

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v^2)}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x} = -\tau \quad (2.9b)$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial(vE)}{\partial x} + \frac{\partial(vp)}{\partial x} = \dot{q}_{\text{int}} \frac{U_{\text{int}}}{A_{\text{int}}}. \quad (2.9c)$$

Der Wärmeterm $\dot{q}_{\text{int}} \frac{U_{\text{int}}}{A_{\text{int}}}$ in der Energiebilanzgleichung (2.9c) entspricht dem Wärmestrom, mit dem das solar erhitzte Stahlrohr mit inneren Umfang U_{int} das Fluid mit Querschnittsfläche A_{int} erhitzt.

Der Druckverlustterm τ der Impulsgleichung (2.9b) berechnet sich mithilfe der empirisch hergeleiteten *Darcy-Weisbach* Gleichung (auch *Blasius-Formel* [3] genannt). Für durchströmte Rohrleitungen mit Durchmesser D und Länge L ergibt sich der durch Reibung verursachte Druckabfall Δp_r mittels

$$\Delta p_r = \xi \frac{L}{D} \frac{\rho v^2}{2}.$$

Der *Druckverlustbeiwert* ξ lässt sich mit der *Rauheit* R_{wand} der Rohrrinnenoberfläche nach Haaland [16] approximativ bestimmen durch

$$\xi^{-1/2} = -1.8 \cdot \log_{10} \left(\left(\frac{R_{\text{wand}}/r_{\text{int}}}{7.4} \right)^{1.11} + \frac{6.9}{\text{Re}_{\text{int}}} \right). \quad (2.10)$$

Liegt eine Zweiphasenströmung vor, so wird durch die Einführung eines *Zweiphasenmultiplikators* B der Druckverlust auf den Druckverlust einer einphasigen Strömung zurückgeführt. Diese Idee geht auf die empirischen Beobachtungen von Lockhart und Martinelli [25] zurück. Gem. Lippke [24] bestimmt sich die Korrelation B durch

$$B = 1 + \dot{x} \cdot \left(\frac{\rho_{\text{boil}}}{\rho_{\text{cond}}} \cdot \left(\frac{\eta_{\text{cond}}}{\eta_{\text{boil}}} \right)^{0.2} - 1 \right), \quad (2.11)$$

wobei η der dynamischen Viskosität entspricht. Der Druckverlustterm τ lautet somit für einen Rohrabschnitt mit dem Radius r_{int}

$$\tau = B\xi \frac{\rho v |v|}{4r_{\text{int}}}. \quad (2.12)$$

Dabei wird anstelle von v^2 der Term $v|v|$ verwendet, um sicher zu stellen, dass die Reibkraft stets entgegen der Strömungsrichtung wirkt.

Vereinfachung der Impulsbilanzgleichung

Die Impulsbilanzgleichung kann durch die Verwendung der Massebilanzgleichung vereinfacht dargestellt werden. Die linke Seite der eindimensionalen Impulsbilanzgleichung (2.9b) lässt sich durch Anwendung der Produktregel vereinfachen. Dabei fallen die unterklammerten Terme nach der Massenbilanzgleichung (2.9a) heraus:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v^2)}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x} &= \underbrace{v \cdot \frac{\partial \rho}{\partial t}} + \rho \cdot \frac{\partial v}{\partial t} + \underbrace{v \cdot \frac{\partial(\rho v)}{\partial x}} + \rho v \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x} \\ &\stackrel{(2.9a)}{=} \rho \cdot \frac{\partial v}{\partial t} + \rho v \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x} \end{aligned} \quad (2.13)$$

Auflösung der totalen Energie in der Energiebilanzgleichung

Die in der Energiebilanzgleichung (2.9c) vorkommende totale Energie je Volumeneinheit E kann durch die physikalische Beziehung

$$E = \rho h - p + \frac{1}{2} \cdot \rho v^2 \quad (2.14)$$

ersetzt werden. Mit dieser Substitution verschwindet in den Bilanzgleichungen die Variable E , wo hingegen die spezifische Enthalpie h neu hinzukommt. Die linke Seite der eindimensionalen Energiebilanzgleichung (2.9c) lässt sich durch Anwendung der Produktregel vereinfachen. Dabei fallen die unterklammerten Terme nach der Massenbilanzgleichung (2.9a) heraus:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial(v(E+p))}{\partial x} &\stackrel{(2.14)}{=} \frac{\partial(\rho h - p + \frac{1}{2} \cdot \rho v^2)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v h + \frac{1}{2} \cdot \rho v^3)}{\partial x} \\ &= \underbrace{h \cdot \frac{\partial \rho}{\partial t}} + \rho \cdot \frac{\partial h}{\partial t} - \frac{\partial p}{\partial t} + \underbrace{\frac{v^2}{2} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial t}} + \frac{\rho}{2} \cdot \frac{\partial(v^2)}{\partial t} \\ &\quad + \underbrace{h \cdot \frac{\partial(\rho v)}{\partial x}} + \rho v \cdot \frac{\partial h}{\partial x} + \underbrace{\frac{v^2}{2} \cdot \frac{\partial(\rho v)}{\partial x}} + \frac{\rho v}{2} \cdot \frac{\partial(v^2)}{\partial x} \\ &\stackrel{(2.9a)}{=} \rho \cdot \frac{\partial h}{\partial t} - \frac{\partial p}{\partial t} + \rho v \cdot \frac{\partial v}{\partial t} + \rho v \cdot \frac{\partial h}{\partial x} + \rho v^2 \cdot \frac{\partial v}{\partial x}. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Mit dieser Substitution lautet das Bilanzgleichungssystem folgendermaßen:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial x} = 0 \quad (2.16a)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{\tau}{\rho} \quad (2.16b)$$

$$\rho \cdot \frac{\partial h}{\partial t} - \frac{\partial p}{\partial t} + \rho v \cdot \frac{\partial v}{\partial t} + \rho v \cdot \frac{\partial h}{\partial x} + \rho v^2 \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = \dot{q}_{\text{int}} \frac{U_{\text{int}}}{A_{\text{int}}}. \quad (2.16c)$$

2.4 Verwendung von Abschlußgleichungen

In den vier Bilanzgleichungen (2.3) und (2.16) kommen die zu bestimmenden thermischen Stoffgrößen

$$p, h, h_{\text{boil}}, h_{\text{cond}}, T, T_{\text{wand}}, \rho, \rho_{\text{boil}}, \rho_{\text{cond}}, \eta, \eta_{\text{boil}}, \eta_{\text{cond}}, c_p, \lambda \text{ und } \dot{x} \quad (2.17)$$

vor. Da mehr Unbekannte als Gleichungen vorliegen, bedarf es sog. *Schlussgleichungen* mit denen das unterbestimmte Gleichungssystem eindeutig lösbar wird.

Aufgrund des angenommenen thermodynamischen Gleichgewichts lassen sich die Stoffgrößen des Fluids gem. der Gibbschen Phasenregel (siehe Abschnitt 1.3.3) durch zwei Zustandsgrößen bestimmen. Gem. Hirsch [18] bietet es sich an, den Druck p und die spezifische Enthalpie h als Zustandsgrößen zu wählen, da deren Abhängigkeit über die thermischen und kalorischen Zustandsgleichungen bekannt sind:

$$\begin{aligned} h_{\text{boil}} &= h_{\text{boil}}(p), & h_{\text{cond}} &= h_{\text{cond}}(p), & T &= T(p, h), \\ \rho &= \rho(p, h), & \rho_{\text{boil}} &= \rho_{\text{boil}}(p), & \rho_{\text{cond}} &= \rho_{\text{cond}}(p), \\ \eta &= \eta(p, h), & \eta_{\text{boil}} &= \eta_{\text{boil}}(p), & \eta_{\text{cond}} &= \eta_{\text{cond}}(p) \\ c_p &= c_p(p, h), & \lambda &= \lambda(p, h), & \dot{x} &= \dot{x}(p, h). \end{aligned} \quad (2.18)$$

Die Stoffgleichungen für Wasser lassen sich gem. IAPWS⁵ durch die *Industrial Formulation 1997* [38] bestimmen, die für mehrere (p, h) -Regionen empirische Gleichungen herleitet. Die langen Formeln werden hier nicht weiter angegeben, sondern auf [38] verwiesen.

Da sich die Dichte gem. (2.18) durch eine Zustandsgleichung in Abhängigkeit von p und h beschreiben lässt, eliminieren sich die Differentialquotienten in den Bilanzgleichungen. Die partielle Ableitung der Dichte ρ nach Ort x und Zeit t lässt sich durch

⁵International Association for the Properties of Water and Steam

Anwendung der Kettenregel darstellen als:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho(p, h)}{\partial x} &= \frac{\partial h}{\partial x} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial h} + \frac{\partial p}{\partial x} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial p}, \\ \frac{\partial \rho(p, h)}{\partial t} &= \frac{\partial h}{\partial t} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial h} + \frac{\partial p}{\partial t} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial p},\end{aligned}\tag{2.19}$$

Da die Zustandsgleichung für die Dichte eine auf Messwerten basierende hergeleitete fünfgeteilte Funktion ist, die mindestens an den Übergängen nicht differenzierbar ist, ist eine analytische Ableitung der IAPWS-Gleichung nicht möglich. Wir helfen uns damit, dass wir die Ableitungsfunktionen $\frac{\partial \rho}{\partial p} \approx \varrho_p$ und $\frac{\partial \rho}{\partial h} \approx \varrho_h$ numerisch bestimmen. Dazu wird der *zentrale Differenzenquotient* verwendet, dessen Fehlerterm quadratisch von der Sprungweite abhängt⁶:

$$\begin{aligned}\varrho_p &= \frac{\rho(p + \varepsilon, h) - \rho(p - \varepsilon, h)}{2 \cdot \varepsilon} \\ \varrho_h &= \frac{\rho(p, h + \varepsilon) - \rho(p, h - \varepsilon)}{2 \cdot \varepsilon}.\end{aligned}\tag{2.20}$$

Mit den Substitutionen (2.20) der Dichte-Ableitungen ergibt sich aus den Bilanzgleichungen (2.16) das System

$$\varrho_h \cdot \frac{\partial h}{\partial t} + \varrho_p \cdot \frac{\partial p}{\partial t} + \rho \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + v \varrho_p \cdot \frac{\partial p}{\partial x} + v \varrho_h \cdot \frac{\partial h}{\partial x} = 0\tag{2.21a}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{\tau}{\rho}\tag{2.21b}$$

$$\rho \cdot \frac{\partial h}{\partial t} - \frac{\partial p}{\partial t} + \rho v \cdot \frac{\partial v}{\partial t} + \rho v \cdot \frac{\partial h}{\partial x} + \rho v^2 \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = \dot{q}_{\text{int}} \frac{U_{\text{int}}}{A_{\text{int}}}\tag{2.21c}$$

$$\frac{\partial T_{\text{wand}}}{\partial t} = \frac{\dot{q}_{\text{ext}} U_{\text{ext}} - \dot{q}_{\text{int}} U_{\text{int}}}{A_{\text{wand}} \cdot c_{\text{wand}} \cdot \rho_{\text{wand}}}.\tag{2.21d}$$

⁶Ist der Abstand ε der Funktionswerte gering, so wäre bei beliebig genauer Rechnung die Näherung zunächst besser. Im Rechner aber ist das Ergebnis einer Rechnung wesentlich von der Maschinengenauigkeit abhängig, da bei der Berechnung mittels Gleitkommazahlen numerische Auslöschung auftritt. Da der Rundungsfehler nicht größer als der Diskretisierungsfehler sein soll, erhält man eine Abschätzung für die Schrittweite des zentralen Differenzenquotienten. Bei Verwendung der doppelt genauen Gleitkommazahlen (Datentyp `double`) liegt die Zahlendarstellungsgenauigkeit bei ca. 10^{-16} . Somit sind also nur Schrittweiten mit $\varepsilon \geq (10^{-16})^{1/3} \approx 5 \cdot 10^{-6}$ sinnvoll.

Durch Umformung der Gleichungen und Isolierung der zeitlichen Gradienten ergibt sich das Gleichungssystem

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{\tau}{\rho} \quad (2.22a)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\rho^2}{\rho \varrho_p + \varrho_h} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{\varrho_h}{\rho \varrho_p + \varrho_h} \cdot \left(\dot{q}_{\text{int}} \frac{U_{\text{int}}}{A_{\text{int}}} + v\tau \right) \quad (2.22b)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\rho}{\rho \varrho_p + \varrho_h} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\varrho_p}{\rho \varrho_p + \varrho_h} \cdot \left(\dot{q}_{\text{int}} \frac{U_{\text{int}}}{A_{\text{int}}} + v\tau \right) \quad (2.22c)$$

$$\frac{\partial T_{\text{wand}}}{\partial t} = \frac{\dot{q}_{\text{ext}} U_{\text{ext}} - \dot{q}_{\text{int}} U_{\text{int}}}{A_{\text{wand}} \cdot c_{\text{wand}} \cdot \rho_{\text{wand}}}. \quad (2.22d)$$

Mit Verwendung der Schallgeschwindigkeit in Wasser

$$c = \sqrt{\frac{\rho}{\rho \varrho_p + \varrho_h}}. \quad (2.23)$$

ergibt sich ein System von vier partiellen Differentialgleichungen, das von den vier Größen v, p, h, T_{wand} und den Schlussgleichungen (2.18), (2.20) und (2.23) abhängt. Diese vier Gleichungen bilden das Modell, das die instationäre Rohrströmung von solar erhitztem Wasser beschreibt:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{\tau}{\rho} \quad (2.24a)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \rho c^2 \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{\varrho_h c^2}{\rho} \cdot \left(\dot{q}_{\text{int}} \frac{U_{\text{int}}}{A_{\text{int}}} + v\tau \right) \quad (2.24b)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + c^2 \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\varrho_p c^2}{\rho} \cdot \left(\dot{q}_{\text{int}} \frac{U_{\text{int}}}{A_{\text{int}}} + v\tau \right) \quad (2.24c)$$

$$\frac{\partial T_{\text{wand}}}{\partial t} = \frac{\dot{q}_{\text{ext}} U_{\text{ext}} - \dot{q}_{\text{int}} U_{\text{int}}}{A_{\text{wand}} \cdot c_{\text{wand}} \cdot \rho_{\text{wand}}}. \quad (2.24d)$$

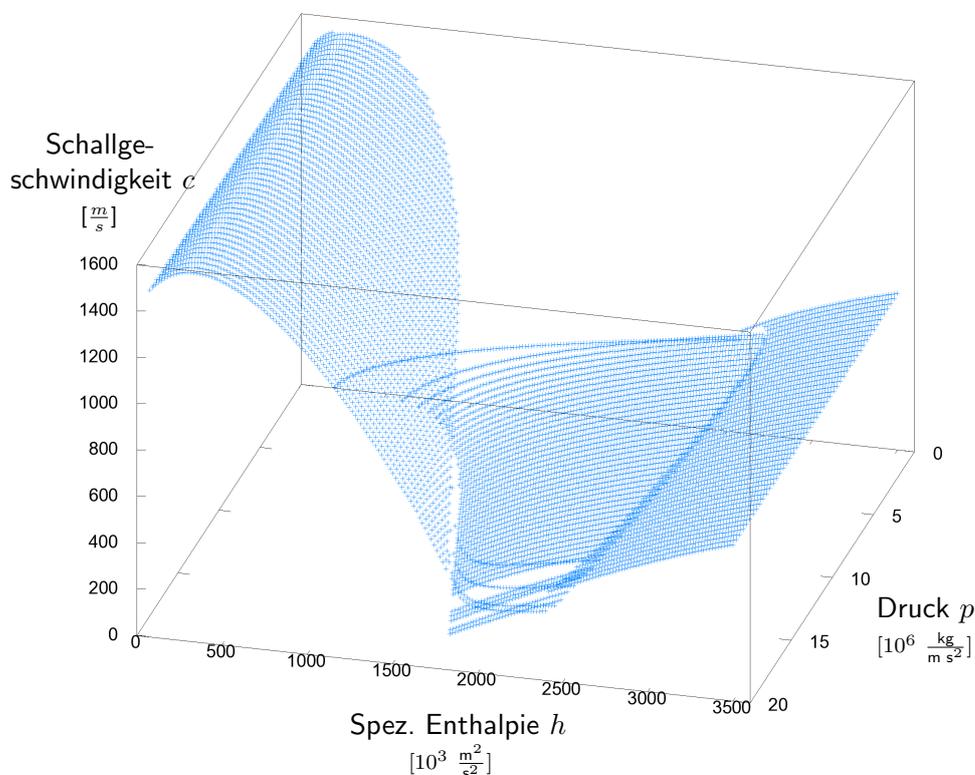


Abbildung 2.2: Darstellung der Schallgeschwindigkeit c in Wasser in Abhängigkeit von Druck p und spez. Enthalpie h . Der Schall nimmt in dem abgebildeten Bereich Werte zwischen 5 und 1600 m/s an.

2.5 Dimensionsanalyse des Thermodynamischen Modells

Das System (2.24) wird einer Dimensionsanalyse unterzogen, um weitere mögliche Vereinfachungen aufzudecken. Bei der *Entdimensionalisierung* des hergeleiteten mathematischen Modells werden die dimensionsbehafteten Größen durch Multiplikation mit geeigneten Referenzgrößen auf dimensionslose Form gebracht, wodurch oftmals die Anzahl der zu berücksichtigenden Parameter reduziert wird. Des Weiteren können in der entdimensionalisierten Form verschiedene Terme und Parameter größenmäßig miteinander verglichen und ggf. aufgrund ihres geringen Einflusses auf die Lösung zur Vereinfachung des Modells vernachlässigt werden.

In dem Modell (2.24) treten die acht Variablen Ort z , Geschwindigkeit v , Zeit t , Dichte ρ , Druck p , spezifische Enthalpie h , Schallgeschwindigkeit c und Rohrwandtempera-

Variable	Referenzgröße	Einheit	Dimensionslose Variable
Länge	$\hat{x} \in [100, 1000]$	m	$x^* = \frac{z}{\hat{x}}$
Geschwindigkeit	$\hat{v} \in [10^{-3}, 40]$	$\frac{\text{m}}{\text{s}}$	$v^* = \frac{v}{\hat{v}}$
Zeit	$\hat{t} = \frac{\hat{x}}{\hat{v}} \in [2.5, 10^6]$	s	$t^* = \frac{t}{\hat{t}}$
Dichte	$\hat{\rho} \in [0.4, 1000]$	$\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$	$\rho^* = \frac{\rho}{\hat{\rho}}$
Druck	$\hat{p} \in [0.1 \cdot 10^6, 20 \cdot 10^6]$	$\frac{\text{kg}}{\text{m s}^2}$	$p^* = \frac{p}{\hat{p}}$
Spez. Enthalpie	$\hat{h} \in [80 \cdot 10^3, 3500 \cdot 10^3]$	$\frac{\text{J}}{\text{kg}}$	$h^* = \frac{h}{\hat{h}}$
Schallgeschwindigkeit	$\hat{c} \in [5, 1600]$	$\frac{\text{m}}{\text{s}}$	$c^* = \frac{c}{\hat{c}}$
Rohrwandtemperatur	$\hat{T}_{\text{wand}} \in [280, 800]$	K	$T_{\text{wand}}^* = \frac{T_{\text{wand}}}{\hat{T}_{\text{wand}}}$

Tabelle 2.1: Referenzgrößen für die Dimensionsanalyse.

tur T_{wand} auf, deren Dimension durch die Länge in [m], Masse in [kg], Zeit in [s] und Temperatur in [K] gegeben ist. Zur Entdimensionalisierung der Variablen betrachten wir die *intrinsic Referenzgrößen*. Mit den Referenzgrößen werden die dimensionsbehafteten Variablen durch dimensionslose Größen ersetzt, die durch das Symbol * gekennzeichnet werden.

Bestimmung der Referenzgrößen

Je nach Wahl der Referenzgrößen erhalten wir unterschiedliche Formen des entdimensionalisierten Modells. Gemäß der Eigenschaften von Wasser werden in Tabelle 2.1 die Referenzgrößen für die Variablen des Modells gewählt.

Die partiellen Ableitungen einer Variable ω nach Ort und Zeit lassen sich durch An-

wendung der Kettenregel entdimensionalisieren:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \omega^*(x^*, t^*)}{\partial x^*} &= \frac{\hat{x}}{\hat{\omega}} \cdot \frac{\partial \omega(z, t)}{\partial x} \\ \frac{\partial \omega^*(x^*, t^*)}{\partial t^*} &= \frac{\hat{t}}{\hat{\omega}} \cdot \frac{\partial \omega(z, t)}{\partial t}.\end{aligned}\tag{2.25}$$

Entdimensionalisierung der Geschwindigkeitsgleichung

Die Geschwindigkeitsgleichung (2.24a) wird folgendermaßen entdimensionalisiert:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial v}{\partial t} + v \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} \\ &= \frac{\hat{v}}{\hat{t}} \cdot \frac{\partial v^*}{\partial t^*} + \frac{\hat{v}^2}{\hat{x}} \cdot v^* \cdot \frac{\partial v^*}{\partial x^*} + \frac{\hat{p}}{\hat{\rho} \hat{x}} \cdot \frac{1}{\rho^*} \cdot \frac{\partial p^*}{\partial x^*} \quad \left| \cdot \frac{\hat{t}}{\hat{v}}, \quad \hat{v} = \frac{\hat{x}}{\hat{t}} \right. \\ &= \frac{\partial v^*}{\partial t^*} + v^* \cdot \frac{\partial v^*}{\partial x^*} + \frac{\hat{p}}{\hat{\rho} \hat{v}^2} \cdot \frac{1}{\rho^*} \cdot \frac{\partial p^*}{\partial x^*}.\end{aligned}\tag{2.26}$$

Die Vorfaktoren der entdimensionalisierten Geschwindigkeitsgleichung sind 1 und $\frac{\hat{p}}{\hat{\rho} \hat{v}^2} \in [\frac{1}{16}, 5 \cdot 10^{13}]$. Da der Unterschied zwischen diesen beiden Vorfaktoren mit einem Faktor von 10^{13} sehr groß werden kann, könnten aus dimensionsanalytischer Sicht die Terme mit dem Vorfaktor 1, also $\frac{\partial v}{\partial t}$ und $v \cdot \frac{\partial v}{\partial x}$, vernachlässigt werden.

Entdimensionalisierung der Druckgleichung

Die Druckgleichung (2.24b) wird folgendermaßen entdimensionalisiert:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial p}{\partial t} + \rho c^2 \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial p}{\partial x} \\ &= \frac{\hat{p}}{\hat{t}} \cdot \frac{\partial p^*}{\partial t^*} + \frac{\hat{v} \hat{\rho} \hat{c}^2}{\hat{x}} \cdot \rho^* c^{*2} \cdot \frac{\partial v^*}{\partial x^*} + \frac{\hat{v} \hat{p}}{\hat{x}} \cdot v^* \cdot \frac{\partial p^*}{\partial x^*} \quad \left| \cdot \frac{\hat{t}}{\hat{p}} \right. \\ &= \frac{\partial p^*}{\partial t^*} + \frac{\hat{\rho} \hat{c}^2}{\hat{p}} \cdot \rho^* c^{*2} \cdot \frac{\partial v^*}{\partial x^*} + v^* \varrho_p^* c^{*2} \cdot \frac{\partial p^*}{\partial x^*}.\end{aligned}\tag{2.27}$$

Die Vorfaktoren der entdimensionalisierten Druckgleichung sind 1 und $\frac{\hat{\rho} \hat{c}^2}{\hat{p}} \in [10^{-6}, 256 \cdot 10^2]$. Da der Unterschied zwischen diesen beiden Vorfaktoren positiv wie auch negativ mit einem Faktor von 10^4 bis 10^6 ausfallen kann, macht es aus dimensionsanalytischer Sicht keinen Sinn Terme zu vernachlässigen.

Entdimensionalisierung der Enthalpiegleichung

Die Enthalpiegleichung (2.24c) wird folgendermaßen entdimensionalisiert:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial h}{\partial t} + c^2 \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial h}{\partial x} \\
 &= \frac{\hat{h}}{\hat{t}} \cdot \frac{\partial h^*}{\partial t^*} + \frac{\hat{v}\hat{c}^2}{\hat{x}} \cdot c^{*2} \cdot \frac{\partial v^*}{\partial x^*} + \frac{\hat{v}\hat{h}}{\hat{x}} \cdot v^* \cdot \frac{\partial h^*}{\partial x^*} \quad \Big| \cdot \frac{\hat{t}}{\hat{c}^2} \\
 &= \frac{\hat{h}}{\hat{c}^2} \cdot \frac{\partial h^*}{\partial t^*} + c^{*2} \cdot \frac{\partial v^*}{\partial x^*} + \frac{\hat{h}}{\hat{c}^2} \cdot v^* \cdot \frac{\partial h^*}{\partial x^*}
 \end{aligned} \tag{2.28}$$

Die Vorfaktoren der entdimensionalisierten Geschwindigkeitsgleichung sind 1 und $\frac{\hat{h}}{\hat{c}^2} \in [\frac{1}{32}, 14 \cdot 10^4]$. Da der Unterschied zwischen diesen beiden Vorfaktoren mit einem Faktor von 10^5 sehr groß werden kann, könnte aus dimensionsanalytischer Sicht der Term mit dem Vorfaktor 1, also $c^2 \cdot \frac{\partial v}{\partial x}$ vernachlässigt werden.

Entdimensionalisierung der Rohrwandtemperatur

Da die Rohrwandtemperaturgleichung (2.3) nur aus dem eigenen zeitlichen Differentialquotienten besteht, ist eine dimensionsanalytische Untersuchung nicht nötig.

Fazit der Dimensionsanalyse

Die Vernachlässigung der Impulsterme gegenüber dem Druckgradienten in der Geschwindigkeitsgleichung deckt sich mit den Überlegungen von Lippke [24], der diese Terme aus thermodynamischen Gründen vernachlässigte. Auch die Vernachlässigung der Geschwindigkeitsterme in der Enthalpiegleichung erklärt Lippke thermodynamisch damit, dass die Änderungen der Geschwindigkeitsgradienten im Vergleich zum Enthalpiegradienten verschwindend gering seien.

Da ein Wegfall der zeitlichen Ableitung in der Geschwindigkeitsgleichung zu einem quasistationären System führen würde, wird auf die Vernachlässigung der Impuls- / Geschwindigkeitsterme verzichtet. Somit steht das Rohrströmungsmodell fest, welches durch die modifizierten Euler-Gleichungen (2.24) beschrieben wird.

2.6 Charakteristiken des Strömungssystems

Die Modellgleichungen (2.24) lassen sich für den *Wertvektor*

$$u : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \Omega \subset \mathbb{R}_+^4, \quad (x, t) \mapsto (v(x, t), p(x, t), h(x, t), T_{\text{wand}}(x, t)) \quad (2.29)$$

in ein *quasilineare Transportgleichungssystem* der Form

$$\frac{\partial u}{\partial t} + M(u) \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = a(u) \quad (2.30)$$

mit

$$M(u) := \begin{pmatrix} v & \frac{1}{\rho} & 0 & 0 \\ \rho c^2 & v & 0 & 0 \\ c^2 & 0 & v & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad a(u) := \begin{pmatrix} -\frac{\tau}{\rho} \\ -\frac{\rho_h c^2}{\rho} \cdot \left(\dot{q}_{\text{int}} \frac{U_{\text{int}}}{A_{\text{int}}} + v\tau \right) \\ \frac{\rho_p c^2}{\rho} \cdot \left(\dot{q}_{\text{int}} \frac{U_{\text{int}}}{A_{\text{int}}} + v\tau \right) \\ \frac{\dot{q}_{\text{ext}} U_{\text{ext}} - \dot{q}_{\text{int}} U_{\text{int}}}{A_{\text{wand}} \cdot c_{\text{wand}} \cdot \rho_{\text{wand}}} \end{pmatrix} \quad (2.31)$$

umformen.

In der Charakteristikentheorie wird die Ausbreitungsrichtung von Informationen in einer Strömung beschrieben, also ob die einzelnen Charakteristiken stromaufwärts oder stromabwärts verlaufen. Gem. LeVeque [23] geben gerade die Eigenwerte die sog. *charakteristische Geschwindigkeit* an. Im Folgenden werden die reellen Eigenwerte des Systems bestimmt, die die Nullstellen des *charakteristischen Polynoms* von M sind:

$$\begin{aligned} \chi_M(\lambda) &= \det(\lambda I - M) \\ &= \lambda^4 - 3v\lambda^3 + (3v^2 - c^2)\lambda^2 + v(c^2 - v^2)\lambda \\ &= (\lambda - v - c) \cdot (\lambda - v) \cdot (\lambda - v + c) \cdot \lambda \stackrel{!}{=} 0. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Somit lauten die Eigenwerte

$$\lambda_1(u) = v + c, \quad \lambda_2(u) = v, \quad \lambda_3(u) = v - c, \quad \lambda_4(u) = 0 \quad (2.33)$$

und ihre zugehörigen Eigenvektoren

$$\text{ev}_1(u) = \begin{pmatrix} 1/c \\ \rho \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{ev}_2(u) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{ev}_3(u) = \begin{pmatrix} -1/c \\ \rho \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{ev}_4(u) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (2.34)$$

In Abbildung 2.3 sind die Eigenwerte in Abhängigkeit von p , h und v dargestellt.

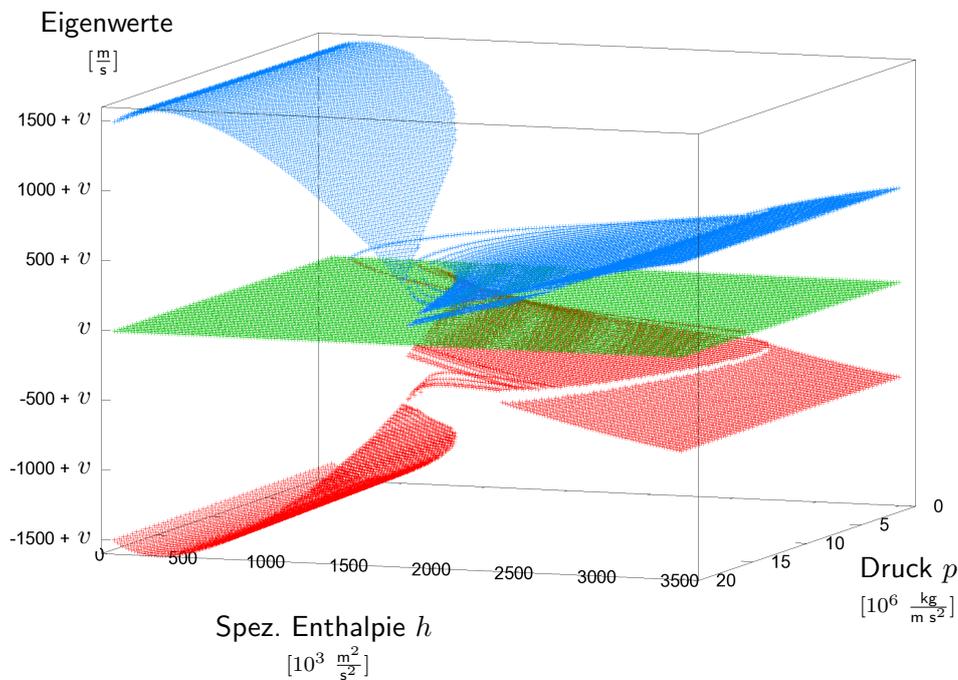


Abbildung 2.3: Darstellung der Eigenwerte in Abhängigkeit von p und h für die Fluidgeschwindigkeit v .

Da alle vier Eigenwerte paarweise verschieden sind, sind alle vier zugehörigen Eigenvektoren nach LeVeque [23] linear unabhängig und die Matrix M diagonalisierbar, womit ein *streng hyperbolisches System* vorliegt.

Numerische Lösung des Rohrströmungs-Modells

Das thermodynamische Modell der Rohrströmung wird in Kapitel 2 durch ein System von vier partiellen Differentialgleichungen beschrieben. Die streng hyperbolischen Strömungsgleichungen durch das solar beheizte Absorberrohr werden mittels der *Finite-Volumen Methode* (FVM) numerisch gelöst. Das Verfahren benutzt in seiner Herleitung eine integrale Form der Erhaltungsgleichungen und erlaubt damit auch unstetige Lösungen. Im Folgenden wird die Finite-Volumen Methode erläutert und auf deren Eigenschaften eingegangen. Es wird ein Verfahren erster Ordnung aufgezeigt, das unser Transportgleichungssystem lösen kann. Mit dem WENO-Ansatz wird das Verfahren auf höhere Ordnungen erweitert.

3.1 Finite-Volumen Methoden

Im eindimensionalen Raum basiert die *Finite-Volumen Methode* in der Zerteilung des Definitionsraumes in eine endliche Anzahl paarweiser disjunkter finiter Volumina, der sog. *Kontrollvolumina* (auch *Gitterzelle* genannt). Hierbei entspricht ein Kontrollvolumen einem Abschnitt des Absorberrohres mit der Querschnittsfläche A_{int} . In jedem Kontrollvolumen gilt der Bilanzraum des Fluides, wobei das Fluid mit der Rohrwand über einen Wärmestrom gekoppelt ist. Zu jedem Zeitpunkt werden die Kontrollvolumina aktualisiert, indem die Bilanzgleichungen über jedes Kontrollvolumen integriert werden und dabei der Gaußsche Integralsatz angewandt wird.

Der gesamte räumliche und zeitliche Rechenbereich für $x \in [0, \ell]$ und $t \in [0, t_{\text{max}}]$ wird

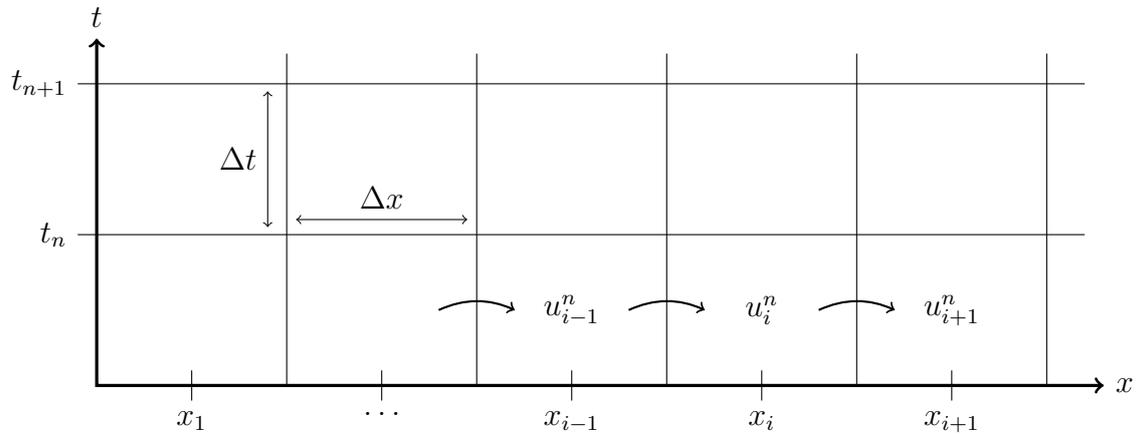


Abbildung 3.1: Schematische Darstellung der Kontrollvolumina einer Absorberstrecke im x - t Raum. Es bezeichnet der Vektor u_i^n mit v_i^n , p_i^n , h_i^n und $T_{\text{wand}_i}^n$ die approximierten Mittelwerte der Gitterzelle C_i zum Zeitpunkt t_n .

mit einem festen Gitter gleichmäßig überdeckt. Hier betrachten wir der Einfachheit halber nur äquidistante Gitter, deren einzelnen Gitterabstände $x_{i+1} - x_i = \Delta x$ bzw. $t_{n+1} - t_n = \Delta t$ konstant sind. Der n -te Zeitpunkt wird mit

$$t_n := n \cdot \Delta t \quad (3.1)$$

bezeichnet. Die i -te Gitterzelle ist definiert als

$$C_i = (x_{i-1/2}, x_{i+1/2}), \quad (3.2)$$

mit seinen Giterrandpunkten

$$x_{i-1/2} := (i-1) \cdot \Delta x, \quad x_{i+1/2} := i \cdot \Delta x \quad (3.3)$$

und seinem Gittermittelpunkt

$$x_i := (i - \frac{1}{2}) \cdot \Delta x, \quad (3.4)$$

siehe Abbildung 3.1. Über dem i -ten Intervall zur Zeit t_n werden die Werte für Geschwindigkeit, Druck, spezifische Enthalpie und Rohrwandtemperatur durch die Mittelwerte v_i^n , p_i^n , h_i^n und $T_{\text{wand}_i}^n$ der Gitterzelle C_i approximiert. Mit Verwendung des in (2.29) eingeführten Wertevektors u ergibt sich über die vier Mittelwerte der Approxi-

mationsvektor

$$u_i^n \approx \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} u(x, t_n) \, dx = \frac{1}{\Delta x} \int_{C_i} u(x, t_n) \, dx. \quad (3.5)$$

Im Folgenden wird auf die Stabilitäts-Bedingung der Finite-Volumen Methode eingegangen und stabile Verfahren für unser System vorgestellt.

Stabilitäts-Bedingung der Finite-Volumen Methode

Die Güte einer numerischen Methode wird durch die *Konvergenz* ausgedrückt. Gem. LeVeque [23] heißt eine Methode konvergent, wenn der globale Fehler $E^N = \|E_i^N\|$ der Methode für eine endliche Zeit $T = N \cdot \Delta t$ mit Verfeinerung des Zeitgitters gegen Null strebt:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left\| \underbrace{u_i^N - \frac{1}{\Delta x} \int_{C_i} u(x, t_N) \, dx}_{=: E_i^N} \right\| = 0.$$

Es ist zu beachten, dass bei Verfeinerung des Zeitgitter mit $\Delta t \rightarrow 0$, die Anzahl der Zeitschritte $N = T/\Delta t$ steigt, um den fest gewählten endlichen Zeitpunkt T zu erreichen. Als Norm des globalen Fehlers E^N wird zumeist eine p -Norm gewählt mit

$$\|E_i^N\| = \left(\Delta x \sum_{i=-\infty}^{\infty} |E_i^N|^p \right)^{1/p}$$

über alle Gitterzellen i . Nach dem *Fundamentalsatz* ist eine numerische Methode für Differentialgleichungen genau dann *konvergent*, wenn die Methode *konsistent* und *stabil* ist:

- Eine Methode heißt *konsistent*, wenn die Differentialgleichungen lokal gut approximiert werden.
- Eine Methode heißt *stabil*, wenn sich die kleinen Fehler jedes Zeitschritts sich nicht zu größeren Fehlern in späteren Zeitschritten summieren.

Für die Stabilität von Finite-Volumen Methoden ist die *CFL-Bedingung* [8], benannt nach den Autoren Courant, Friedrichs und Lewy (1928), eine notwendige Voraussetzung. Diese stellt an die Methode die Bedingung, dass Informationen in der korrekten physikalischen Geschwindigkeit weitergegeben werden. Es wird also gefordert, dass die

Informationen innerhalb eines Zeitschritts höchstens eine Gitterzelle durchlaufen, da sonst die Informationen durch das numerische Verfahren verloren gehen würden.

Die sog. *CFL-Zahl* gibt gerade die Anzahl der Gitterzellen an, die Informationen innerhalb eines Zeitschritts durchlaufen. In einem hyperbolischen Gleichungssystem werden die Geschwindigkeiten der einzelnen Informationen durch die Eigenwerte λ_j der Jakobimatrix $M(u)$ bestimmt, so dass die CFL-Zahl gem. LeVeque [23] definiert ist als

$$\text{CFL} = \frac{\Delta t}{\Delta x} \cdot \max_j \{|\lambda_j|\} \stackrel{!}{\leq} 1. \quad (3.6)$$

Diese Bedingung muss für jede Gitterzelle gelten. Da sich gem. (2.33) in jeder Gitterzelle der maximale Eigenwert bestimmen lässt (und damit der maximale Eigenwert λ_{\max}), stellt die CFL-Bedingung eine Bedingung an Δt , nämlich

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x}{\lambda_{\max}}. \quad (3.7)$$

Randwerte und Geisterzellen

Bei allen numerischen Verfahren errechnet sich die numerische Lösung in einer Gitterzelle unter Verwendung der Werte der benachbarten Gitterzellen. In der Praxis wird auf einem endlichen Gitter gerechnet, so dass zum Rand hin keine Nachbarzellen mehr existieren. Stattdessen werden physikalische *Randwerte* verwendet, die zum Lösen der Randzellen herangezogen werden.

Im Allgemeinen wird gem. [23] dazu der Rand des endlichen Gitters um sog. *Geisterzellen* erweitert. Die Werte der Geisterzellen werden zu Beginn jedes Zeitschritts in Abhängigkeit von den Randwerten und den inneren Werten gewählt. Mathematisch ergeben sich die Werte in den Geisterzellen durch die Eigenvektoren des Systems.

Während an den Zufluss-Grenzen die physikalischen Randwerte für die Geisterzellen verwendet werden, gibt es für Geisterzellen an den Abfluss-Grenzen verschiedene Strategien. Gängig ist gem. [23] die Werte der Geisterzellen durch innere Werte zu extrapolieren. Für eine Geisterzelle C_{N+1} ergeben sich die Werte u_{N+1}^n gem. Extrapolation der 0. Ordnung durch

$$u_{N+1}^n = u_N^n \quad (3.8)$$

und gem. Extrapolation der 1. Ordnung durch

$$u_{N+1}^n = u_N^n + (u_N^n - u_{N-1}^n). \quad (3.9)$$

Für das vorliegende solare Rohrströmungsproblem werden gem. Ponweiser [30] die Randwerte für Geschwindigkeit und spezifische Enthalpie am Rohreintritt und für Druck am Rohraustritt vorgegeben. Durch diese Vorgehensweise wird die Annahme einer Pumpe am Rohreintritt verwirklicht. Die Anzahl der Geisterzellen hängt von dem Verfahren und dessen Ordnung ab. Im Folgenden werden für das vorliegende System stabile Verfahren erster und dritter Ordnung vorgestellt.

3.2 Schema der Transportgleichung

Unser Problem wird durch die quasilineare Transportgleichung (2.30) mit (2.31) beschrieben, welche in der Form

$$\frac{\partial u}{\partial t} + M(u) \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = a(u) \quad (3.10)$$

mit $M \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ vorliegt. Die Standard Finite-Volumen Verfahren verlangen eine Transportgleichung in der sog. *konservativen* Form:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} = 0.$$

Im Folgenden wird gezeigt, dass sich das vorliegende System nicht in diese Form umformen lässt.

3.2.1 Form der quasilinearen Transportgleichung

Zunächst wird das System (3.10) gemäß der in [7, 14, 15] entwickelten Idee in eine homogene Form gebracht. Mit der Identitätsabbildung $x \mapsto x$ lässt sich (3.10) auch ausdrücken durch

$$\frac{\partial u}{\partial t} + M(u) \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = a(u) \cdot \frac{\partial x}{\partial x}, \quad (3.11)$$

da $\partial x / \partial x \equiv 1$. Mit Hinzunahme der Gleichung

$$\frac{\partial x}{\partial t} = 0 \quad (3.12)$$

wird das System (3.11) in die sog. *nichtkonservative* Form

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \widetilde{M}(U) \cdot \frac{\partial U}{\partial x} = 0 \quad (3.13)$$

umgeformt, wobei $U \in \Omega \times \mathbb{R}$ der erweiterte Vektor

$$U = \begin{pmatrix} u \\ x \end{pmatrix} = (v, p, h, T_{\text{wand}}, x)^\top \quad (3.14)$$

und $\widetilde{M}(U)$ die 5×5 Matrix

$$\begin{aligned} \widetilde{M}(U) &= \left(\begin{array}{c|c} M(u) & -a(u) \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right) \\ &= \begin{pmatrix} v & \frac{1}{\rho} & 0 & 0 & \frac{\tau}{\rho} \\ \rho c^2 & v & 0 & 0 & \frac{\varrho_h c^2}{\rho} \cdot \left(\dot{q}_{\text{int}} \frac{U_{\text{int}}}{A_{\text{int}}} + v\tau \right) \\ c^2 & 0 & v & 0 & -\frac{\varrho_p c^2}{\rho} \cdot \left(\dot{q}_{\text{int}} \frac{U_{\text{int}}}{A_{\text{int}}} + v\tau \right) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\dot{q}_{\text{ext}} U_{\text{ext}} - \dot{q}_{\text{int}} U_{\text{int}}}{A_{\text{wand}} \cdot c_{\text{wand}} \cdot \rho_{\text{wand}}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (3.15)$$

ist. Fortan bezeichne U_i^n den in (3.5) eingeführten und um den x -Wert erweiterten Vektor der Mittelwerte in der Gitterzelle C_i zum Zeitpunkt t_n .

Eine Transportgleichung der Form (3.13) kann nur dann in die konservative Form überführt werden, wenn sich eine Flussfunktion $f(U)$ finden lässt, für die die Matrix $\widetilde{M}(U)$ Jakobimatrix ist, es also gilt:

$$\frac{\partial f(U)}{\partial U} = \widetilde{M}(U). \quad (3.16)$$

Die Existenz einer Stammfunktion für $\widetilde{M}(U)$ hängt von der Existenz der Stammfunktionen seiner fünf Vektorfelder $\widetilde{M}_1(U)$, $\widetilde{M}_2(U)$, $\widetilde{M}_3(U)$, $\widetilde{M}_4(U)$ und $\widetilde{M}_5(U)$ ab, welches den Zeilenvektoren der Matrix entspricht. Nach dem zweiten Hauptsatz für Potenti-

alfelder hat ein stetig differenzierbares Vektorfeld $\widetilde{M}_i : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}^5$ auf einem einfach zusammenhängenden Gebiet $\mathcal{G} \subset \mathbb{R}^5$ genau dann ein Potentialfeld, wenn die *Integritätsbedingung* $\text{rot}(\widetilde{M}_j) = 0$ gilt [4]. Für die Existenz eines Potentials für \widetilde{M}_j muss also notwendigerweise gelten:

$$\frac{\partial \widetilde{M}_{ji}}{\partial U_k} = \frac{\partial \widetilde{M}_{jk}}{\partial U_i} \quad \forall i, k = 1, 2, 3, 4. \quad (3.17)$$

Diese Bedingung ist aber wegen der letzten Spalte nicht erfüllt. Beispielsweise für $j = 1, i = 5$ und $k = 1$ ist

$$\frac{\partial \widetilde{M}_{15}}{\partial U_1} = \frac{\partial(\tau/\rho)}{\partial v} \neq 0 = \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial \widetilde{M}_{11}}{\partial U_5} \quad (3.18)$$

Es lässt sich also unser System nicht in der konservativen Form darstellen, womit die Standard Verfahren der Finite-Volumen Methode wie beispielsweise *Lax-Friedrichs* [23] oder *MUSCL*¹ [21] nicht angewendet werden können.

3.2.2 Roe Schema

Zur Diskretisierung der nichtkonservativen Transportgleichung (3.13) wird das Gleichungssystem zunächst in Integralform gebracht, indem örtlich über eine Gitterzelle C_i und zeitlich von t_n bis t_{n+1} integriert wird:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{C_i} U(x, t) \, dx \, dt + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{C_i} \widetilde{M}(U) \frac{\partial U}{\partial x} \, dx \, dt = 0. \quad (3.19)$$

Durch Auflösung des Zeitintegrals über $U(x, t)$ und Division durch die Gitterzellenlänge Δx ergibt sich die Gleichung

$$\underbrace{\frac{1}{\Delta x} \int_{C_i} U(x, t_{n+1}) \, dx}_{\approx U_i^{n+1}} - \underbrace{\frac{1}{\Delta x} \int_{C_i} U(x, t_n) \, dx}_{\approx U_i^n} + \frac{1}{\Delta x} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{C_i} \widetilde{M}(U) \frac{\partial U}{\partial x} \, dx \, dt = 0. \quad (3.20)$$

¹engl.: Monotonic Upstream Scheme for Conservation Laws

Die Ortsintegrale über $U(x, t)$ werden durch den Mittelwertsvektor U_i^n bzw. U_i^{n+1} approximiert, so dass sich aus Gleichung (3.20)

$$U_i^{n+1} = U_i^n - \frac{1}{\Delta x} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{C_i} \widetilde{M}(U) \frac{\partial U}{\partial x} dx dt \quad (3.21)$$

ergibt. Wie bereits im obigen Abschnitt festgestellt, existiert zu der Matrix M (und damit auch zu $\widetilde{M}(U)$) keine Stammfunktion um das Ortsintegral aufzulösen. Als Ausweg benutzt man die Definition von *schwachen Lösungen*. Dazu schwächt man den klassischen Lösungsbegriff in geeigneter Weise ab und erlaubt damit auch Lösungen, die (im klassischen Sinne) nicht differenzierbar sind. In unserem Fall bedeutet dies, dass $\widetilde{M}(U) \partial U / \partial x$ innerhalb einer Gitterzelle gemäß einer Definition approximiert wird.

Wir verwenden die auf Dal Maso u. a. [9] zurückgehende schwache Lösung der *pfad-konservativen Methoden*, die den Fluß $\int_{C_i} \widetilde{M}(U) \partial U / \partial x dx$ als Lebesgue-Borelmaß über einen Pfad $\Phi = \Phi(s; U_{i-1}, U_i)$ interpretieren, der zwei Zustände U_{i-1} und U_i mit $s \in [0, 1]$ verbindet. Somit wird die Matrix \widetilde{M} interpretiert durch $\widetilde{M}(\Phi(s; U_{i-1}, U_i))$.

Die Integration dieser Pfad-Matrix entlang des Pfades Φ wird mit $\widetilde{M}_\Phi(U_{i-1}, U_i)$ bezeichnet und entspricht der *Linearisierung der Roe-Matrix*. Dabei muss \widetilde{M}_Φ gem. [37] so gewählt werden, dass sie die folgenden Eigenschaften erfüllt:

$$\widetilde{M}_\Phi(U, U) = \widetilde{M}(U) \quad \forall U \in \Omega \quad (3.22a)$$

$$\widetilde{M}_\Phi(U_{i-1}, U_i) \cdot (U_i - U_{i-1}) = \int_0^1 \widetilde{M}(\Phi(s; U_{i-1}, U_i)) \frac{\partial \Phi(s; U_{i-1}, U_i)}{\partial s} ds \quad (3.22b)$$

$$\widetilde{M}_\Phi(U_{i-1}, U_i) \text{ hat paarweise verschiedene reelle Eigenwerte } \forall U_{i-1}, U_i \in \Omega. \quad (3.22c)$$

Ist die Matrix $\widetilde{M}(U)$ die Jakobi-Matrix eines Flussvektors $f(U)$, dann ist (3.22) unabhängig von der Wahl des Pfades und die klassische Roe-Eigenschaft

$$\widetilde{M}_\Phi(U_{i-1}, U_i) \cdot (U_i - U_{i-1}) = f(U_i) - f(U_{i-1}) \quad (3.23)$$

ist erfüllt. Auf Grundlage dieser Erkenntnis wird im Folgenden das von Canestrelli u. a. entwickelte *PRICE-C Schema*² [6] vorgestellt.

3.3 Verfahren erster Ordnung

Mit der Verwendung des kanonischen Pfades

$$\Phi(s; U_{i-1}, U_i) = U_{i-1} + s \cdot (U_i - U_{i-1}) \quad (3.24)$$

ergibt sich mit (3.22b) die folgende Definition einer Roe-Matrix:

$$\widetilde{M}_\Phi(U_{i-1}, U_i) = \int_0^1 \widetilde{M}(\Phi(s; U_{i-1}, U_i)) \, ds. \quad (3.25)$$

Canestrelli u. a. schlagen vor, die Roe-Matrix direkt entlang des Pfadintegrals mittels der reskalierten Gaußschen Quadraturformeln zu approximieren [6]. Die N -Punkt Gauß-Quadratur ist für das Integral über Polynome bis zum Grad $2N - 1$ exakt. Die Approximation der Roe-Matrix \widetilde{M}_Φ lautet für Stützpunkte s_j und Gewichte w_j

$$\widetilde{M}_\Phi^N(U_{i-1}, U_i) = \sum_{j=1}^N w_j \widetilde{M}(\Phi(s_j; U_{i-1}, U_i)). \quad (3.26)$$

Für beispielsweise $N = 3$ lauten die reskalierten Stützpunkte und Gewichte

$$s_1 = \frac{1}{2}, \quad s_{2,3} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{15}}{10}, \quad w_1 = \frac{8}{18}, \quad w_{2,3} = \frac{5}{18} \quad (3.27)$$

Mit der Annäherung der Roe-Matrix durch eine Gauß-Quadratur und der Verwendung eines zeitlichen *Einschrittverfahrens* haben Canestrelli u. a. die nichtkonservative Version des FORCE-Schemas entwickelt, das sog. *PRICE-C Schema* [6]

$$U_i^{n+1} = U_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \cdot \left(\widetilde{M}_{i+1/2}^- \cdot (U_{i+1}^n - U_i^n) + \widetilde{M}_{i-1/2}^+ \cdot (U_i^n - U_{i-1}^n) \right), \quad (3.28a)$$

$$\widetilde{M}_{i+1/2}^- = \frac{1}{4} \cdot \left(2 \cdot \widetilde{M}_\Phi^N(U_i^n, U_{i+1}^n) - \frac{\Delta x}{\Delta t} \cdot I - \frac{\Delta t}{\Delta x} \cdot (\widetilde{M}_\Phi^N(U_i^n, U_{i+1}^n))^2 \right), \quad (3.28b)$$

²engl.: Primitive Centred Numerical Scheme

$$\widetilde{M}_{i-1/2}^+ = \frac{1}{4} \cdot \left(2 \cdot \widetilde{M}_{\Phi}^N(U_{i-1}^n, U_i^n) + \frac{\Delta x}{\Delta t} \cdot I + \frac{\Delta t}{\Delta x} \cdot (\widetilde{M}_{\Phi}^N(U_{i-1}^n, U_i^n))^2 \right), \quad (3.28c)$$

mit der Quasi-Identitätsmatrix I , dessen letzter Diagonaleintrag wegen (3.12) gleich Null ist. Dieses Verfahren ist von erster Ordnung.

3.4 Erweiterung zu höheren Ordnungen

Das PRICE-C Schema kann durch den ADER³ Ansatz [36] zu einem Verfahren höherer Ordnung erweitert werden. Bei diesem Ansatz werden Strategien verfolgt, um die Lösung der Gleichung (3.21)

$$U_i^{n+1} = U_i^n - \frac{1}{\Delta x} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{C_i} \widetilde{M}(U) \frac{\partial U}{\partial x} dx dt$$

durch eine genauere Berechnung von $\widetilde{M}(U)$ besser anzunähern. Dazu werden mithilfe des WENO⁴ Ansatzes und mit Verwendung der Taylor-Entwicklung die Mittelwerte U_i^n der Zellen C_i durch ein orthogonales Ort-Zeit Polynom $U_i(x, t)$ mit Stützstellen in den Nachbarzellen dargestellt.

Durch die Ausweitung der Stützstellen und die beliebig tiefe Taylor-Entwicklung sind Verfahren mit sehr hoher Genauigkeit möglich. Die Erweiterung des Schemas erster Ordnung zu einem Verfahren höherer Ordnung erfolgt in drei Schritten:

Konstruktion des Polynoms $U_i^n(x)$

Gemäß des WENO-Ansatzes [20] wird der örtlichen Verlauf der Werte $U(x, t_n)$ durch einen Vektor von Polynomen $U_i^n(x)$ für $x \in C_i$ angenähert. Für die Konstruktion des Polynoms $U_i^n(x)$ von der Ordnung $4k - 1$ werden je Zelle insgesamt $4k + 1$ benachbarte Gitterpunkte benötigt.

Das Polynom $U_i^n(x)$ besteht aus einer Kombination von drei orthogonalen Polynomen der Form $\mathbf{p}^{(i,s)}(x, t_n)$, deren Konstruktion auf der Teilmenge $S^{(i,s)}$ der $4k + 1$ benach-

³engl.: Arbitrary high order scheme which utilises the hyperbolic Riemann problem for the advection of the higher derivatives

⁴engl.: Weighted Essentially Non-Oscillatory Method

barten Gitterpunkte basiert, mit

$$S^{(i,s)} := \bigcup_{j=i-k+s}^{i+k+s} C_j = \bigcup_{\nu=0}^{2k} C_{j_\nu}, \quad \text{mit } j_\nu = i - k + s + \nu, \quad (3.29)$$

wobei $s \in [-k, k]$ die Verschiebung des zentralen Stützpunktes bezüglich C_i ist und k die örtliche Ausdehnung der Stützstellen zur linken und rechten Seite. Die Zelle C_i wird in Abhängigkeit von s durch $C_{j_{k-s}}$ bezeichnet. Eine zentrale Polynom-Konstruktion wird durch $s = 0$ gegeben, eine linksseitige durch $s = -k$ und eine rechtsseitige durch $s = k$. In unserem Ansatz wird $U_i^n(x)$ aus den drei Polynomen mit den Konstruktions-Punktgruppen $S^{(i,-k)}$, $S^{(i,0)}$ und $S^{(i,k)}$ gebildet.

Die Polynome $\mathbf{p}^{(i,s)}(x, t_n)$ werden so konstruiert, dass sie ein orthogonales Funktionensystem auf $C_i = C_{j_{k-s}}$ bilden. Grundlage dieser Polynome bilden die auf C_i reskalierten Legendre Polynome $L_\ell(x)$ der $2k + 1$ Stützstellen in $S^{(i,s)}$

$$\begin{aligned} \mathbf{p}^{(i,s)}(x, t_n) &:= \sum_{\ell=0}^N \mathbf{p}_\ell^{(i,s)}(x, t_n) = \sum_{\ell=0}^N \mathbf{w}_\ell^{(i,s)}(t_n) \cdot L_\ell(x) \\ &= \mathbf{w}_0^{(i,s)}(t_n) \cdot L_0(x) + \mathbf{w}_1^{(i,s)}(t_n) \cdot L_1(x) + \dots + \mathbf{w}_N^{(i,s)}(t_n) \cdot L_N(x) \\ &=: \mathbf{w}^{(i,s)}(t_n) \cdot \mathbf{L}_0^N(x), \end{aligned} \quad (3.30)$$

die ein orthogonales Polynom vom Grad N definieren. Die Gewichtsvektoren $\mathbf{w}_\ell^{(i,s)}(t_n)$ werden integralerhaltend gewählt mit

$$\frac{1}{|C_{j_\nu}|} \cdot \int_{C_{j_\nu}} \mathbf{p}^{(i,s)}(x, t_n) \, dx = \frac{1}{\Delta x} \cdot \int_{C_{j_\nu}} \mathbf{w}^{(i,s)}(t_n) \cdot \mathbf{L}_0^N(x) \, dx \stackrel{!}{=} U_{j_\nu}^n, \quad \forall C_{j_\nu} \in S^{(i,s)}. \quad (3.31)$$

Aus Stabilitätsgründen wird gem. Dumbser und Käser [11] der Grad der Legendre-Polynome mit $N := 2k$ niedriger gewählt als die Anzahl der $2k + 1$ Stützstellen in

$S^{(i,s)}$. Das entstehende Gleichungssystem lautet

$$\frac{1}{\Delta x} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \int_{C_{j_0}} L_0(x) dx & \int_{C_{j_0}} L_1(x) dx & \dots & \int_{C_{j_0}} L_{2k}(x) dx \\ \int_{C_{j_1}} L_0(x) dx & \int_{C_{j_1}} L_1(x) dx & \dots & \int_{C_{j_1}} L_{2k}(x) dx \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \int_{C_{j_{2k}}} L_0(x) dx & \int_{C_{j_{2k}}} L_1(x) dx & \dots & \int_{C_{j_{2k}}} L_{2k}(x) dx \end{pmatrix}}_{=:A \in \mathbb{R}^{2k+1 \times 2k+1 \times \Omega}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{w}_0^{(i,s)}(t_n) \\ \mathbf{w}_1^{(i,s)}(t_n) \\ \vdots \\ \mathbf{w}_{2k}^{(i,s)}(t_n) \end{pmatrix}}_{=:w \in \mathbb{R}^{2k+1 \times \Omega}} \stackrel{!}{=} \underbrace{\begin{pmatrix} U_{j_0}^n \\ U_{j_1}^n \\ \vdots \\ U_{j_{2k}}^n \end{pmatrix}}_{=:b \in \mathbb{R}^{2k+1 \times \Omega}} \quad (3.32)$$

und lässt sich mittels *LR-Zerlegung* lösen. Liegen die Gewichte $\mathbf{w}^{(i,s)}(t_n)$ der drei orthogonalen Polynome $\mathbf{p}^{(i,-k)}(x, t_n)$, $\mathbf{p}^{(i,0)}(x, t_n)$ und $\mathbf{p}^{(i,k)}(x, t_n)$ vor, ergibt sich aus deren Kombination das gesuchte Polynom $U_i^n(x)$ durch

$$\begin{aligned} U_i^n(x) &= \omega_{-k} \cdot \mathbf{p}^{(i,-k)}(x, t_n) + \omega_0 \cdot \mathbf{p}^{(i,0)}(x, t_n) + \omega_k \cdot \mathbf{p}^{(i,k)}(x, t_n) \\ &\stackrel{(3.30)}{=} \left(\omega_{-k} \cdot \mathbf{w}^{(i,-k)}(t_n) + \omega_0 \cdot \mathbf{w}^{(i,0)}(t_n) + \omega_k \cdot \mathbf{w}^{(i,k)}(t_n) \right) \cdot \mathbf{L}_0^N(x) \end{aligned} \quad (3.33)$$

für $x \in [x_{i-1/2}, x_{i+1/2}]$. Die nichtlinearen Gewichte ω_s ergeben sich durch

$$\omega_s = \frac{\tilde{\omega}_s}{\tilde{\omega}_{-k} + \tilde{\omega}_0 + \tilde{\omega}_k}, \quad \tilde{\omega}_s = \frac{\lambda_s}{(\sigma_s + \varepsilon)^r} \quad (3.34)$$

mit den Parametern $\varepsilon = 10^{-14}$, $r = 8$, $\lambda_0 = 10^5$ und $\lambda_{-k} = \lambda_k = 1$, gem. [6]. Der Oszillationsindikator σ_s wird gem. Jiang und Shu [20] bestimmt durch

$$\sigma_s = \sum_{\alpha=1}^N \left\| \frac{\partial^\alpha \mathbf{p}^{(i,s)}}{\partial x^\alpha} \right\|_{L_2} = \sum_{\alpha=1}^N \left(\sum_{\ell=0}^N \sum_{m=0}^N \left(\int_{C_i} (\Delta x)^{2\alpha-1} \cdot \frac{\partial^\alpha \mathbf{p}_\ell^{(s,k)}}{\partial x^\alpha} \cdot \frac{\partial^\alpha \mathbf{p}_m^{(s,k)}}{\partial x^\alpha} dx \right) \right). \quad (3.35)$$

Zeitliche Entwicklung des Polynoms

Die im vorigen Abschnitt bestimmten Polynome $U_i^n(x)$ für eine Zelle C_i sind für einen festen Zeitpunkt t_n definiert. Im Folgenden werden diese mit Verwendung der Taylor-Entwicklung zeitlich entwickelt, so dass ein Ort-Zeit Polynom $U_i(x, t)$ entsteht. Die benötigten Ableitungen werden mithilfe des Cauchy-Kowalewski Algorithmus gene-

riert.

Die lokale Lösung $U_i(x, t)$ für eine Zelle C_i lässt sich um den Mittelpunkt x_i folgendermaßen entwickeln:

$$\begin{aligned}
 U_i(x, t) &= U_i^n(x_i) + (x - x_i) \cdot \frac{\partial(U_i^n(x_i))}{\partial x} + (t - t_n) \cdot \frac{\partial(U_i^n(x_i))}{\partial t} \\
 &+ \frac{1}{2} \cdot (x - x_i)^2 \cdot \frac{\partial^2(U_i^n(x_i))}{\partial x^2} + (x - x_i)(t - t_n) \cdot \frac{\partial^2(U_i^n(x_i))}{\partial t \partial x} \\
 &+ \frac{1}{2}(t - t_n)^2 \cdot \frac{\partial^2(U_i^n(x_i))}{\partial t^2} + \dots
 \end{aligned} \tag{3.36}$$

Mit dem klassischen Cauchy-Kowalewsky Algorithmus werden zeitliche Ableitungen durch Ortsableitungen substituiert. Die erste zeitliche Ableitung kann direkt aus der nichtkonservativen Form des Gleichungssystems (3.13) durch

$$\frac{\partial U}{\partial t} = -\widetilde{M}(U) \cdot \frac{\partial U}{\partial x} \tag{3.37}$$

gewonnen werden. Die gemischte Ort-Zeit-Ableitung ergibt sich durch Ableitung von (3.37) nach dem Ort

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t \partial x} = -\frac{\partial \widetilde{M}(U)}{\partial x} \cdot \frac{\partial U}{\partial x} - \widetilde{M}(U) \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \tag{3.38}$$

und die zweite zeitliche Ableitung ergibt sich durch Ableitung von (3.37) nach der Zeit

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} &= -\frac{\partial \widetilde{M}(U)}{\partial t} \cdot \frac{\partial U}{\partial x} - \widetilde{M}(U) \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial t \partial x} \\
 &= -\frac{\partial \widetilde{M}(U)}{\partial x} \cdot \frac{\partial U}{\partial t} - \widetilde{M}(U) \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial t \partial x} \\
 &\stackrel{3.37, 3.38}{=} 2 \cdot \widetilde{M}(U) \cdot \frac{\partial \widetilde{M}(U)}{\partial x} \cdot \frac{\partial U}{\partial x} + \widetilde{M}(U) \cdot \widetilde{M}(U) \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}.
 \end{aligned} \tag{3.39}$$

Höhere Ableitungen lassen sich mittels wiederholter Differentiation erreichen.

Mit Einsetzen der Ableitungen des Polynoms $U_i^n(x)$ in Gleichung (3.36) liegt mit $U_i(x, t)$ ein lokales Ort-Zeit Polynom vor, welches die Werte U approximiert. Die Ordnung der Approximation wird durch die Ordnung des WENO-Polynoms (3.33) und

der Taylor-Entwicklung (3.36) bestimmt.

Schema höherer Ordnung

Mit Verwendung des lokalen Ort-Zeit Polynoms $U_i(x, t)$ für eine Zelle C_i wird die Lösung der Gleichung (3.21)

$$U_i^{n+1} = U_i^n - \frac{1}{\Delta x} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{C_i} \widetilde{M}(U) \frac{\partial U}{\partial x} dx dt$$

durch ein Einschritt-Verfahren höherer Ordnung [6, 7, 29]

$$\begin{aligned} U_i^{n+1} = U_i^n & - \frac{1}{\Delta x} \cdot \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{C_i} \widetilde{M}(U_i(x, t)) \frac{\partial U_i(x, t)}{\partial x} dx dt \\ & - \frac{1}{\Delta x} \cdot \int_{t_n}^{t_{n+1}} \widetilde{M}_{i+1/2}^- \cdot (U_{i+1}(x_{i+1/2}, t) - U_i(x_{i+1/2}, t)) dt \\ & - \frac{1}{\Delta x} \cdot \int_{t_n}^{t_{n+1}} \widetilde{M}_{i-1/2}^+ \cdot (U_i(x_{i-1/2}, t) - U_{i-1}(x_{i-1/2}, t)) dt \end{aligned} \quad (3.40)$$

angenähert. $\widetilde{M}_{i+1/2}^-$ und $\widetilde{M}_{i-1/2}^+$ werden gemäß (3.28b) und (3.28c) bestimmt und die Integrale unter Verwendung der Gauß-Quadratur mit ausreichender Genauigkeit aufgelöst. Gem. [6] reichen drei Stützstellen aus. Dieses voll-diskrete Schema erweitert das Verfahren erster Ordnung (3.28) um den Term $\int \int \widetilde{M} U_x$, der den glatten Anteil des nichtkonservativen Produkts integriert.

3.5 Verfahren dritter Ordnung

Im Folgenden wird mit der vorgestellten Erweiterung ein Verfahren dritter Ordnung hergeleitet.

Konstruktion des Polynoms $U_i^n(x)$

Für ein Verfahren dritter Ordnung wird $k := 1$ gewählt, so dass die Menge der Aufhängepunkte der drei zu konstruierenden orthogonalen Polynome gem. (3.29)

$$S^{(i,-1)} = \{C_{i-2}, C_{i-1}, C_i\}, \quad S^{(i,0)} = \{C_{i-1}, C_i, C_{i+1}\} \quad \text{und} \quad S^{(i,1)} = \{C_i, C_{i+1}, C_{i+2}\} \quad (3.41)$$

lautet. Die verwendeten Lagrange-Polynome bis zur Ordnung $N := 2k = 2$ werden für die Zelle C_i von $[-1, 1]$ auf das Intervall $C_i = [x_{i-1/2}, x_{i+1/2}]$ reskaliert

$$\mathbf{L}_0^2(x) = \begin{pmatrix} L_0(x) \\ L_1(x) \\ L_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2\frac{x-x_i}{\Delta x} \\ 6\left(\frac{x-x_i}{\Delta x}\right)^2 - \frac{1}{2} \end{pmatrix}. \quad (3.42)$$

Gem. (3.30) lassen sich die orthogonalen Polynome bilden, die für $s = -1, 0, 1$ lauten

$$\begin{aligned} \mathbf{p}^{(i,s)}(x, t_n) &= \mathbf{w}_0^{(i,s)}(t_n) \cdot L_0(x) + \mathbf{w}_1^{(i,s)}(t_n) \cdot L_1(x) + \mathbf{w}_2^{(i,s)}(t_n) \cdot L_2(x) \\ &= \mathbf{w}^{(i,s)}(t_n) \cdot \mathbf{L}_0^2(x). \end{aligned} \quad (3.43)$$

Die drei linearen Gleichungssysteme lauten für $s = -1, 0, 1$ mit $S^{(i,s)} = \{C_{j_0}, C_{j_1}, C_{j_2}\}$ und $j_\nu = i - 1 + s + \nu$ mit $\nu = 0, 1, 2$ gem. (3.32)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2(s-1) & 6(s-1)^2 \\ 1 & 2s & 6s^2 \\ 1 & 2(s+1) & 6(s+1)^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{w}_0^{(i,s)} \\ \mathbf{w}_1^{(i,s)} \\ \mathbf{w}_2^{(i,s)} \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} U_{j_0}^n \\ U_{j_1}^n \\ U_{j_2}^n \end{pmatrix}, \quad (3.44)$$

woraus sich mit LR -Zerlegung die Gewichte

$$\begin{aligned}
 \mathbf{w}^{(i,-1)}(t_n) &= \begin{pmatrix} U_{j_2}^n \\ \frac{1}{4}(U_{j_0}^n - 4U_{j_1}^n + 3U_{j_2}^n) \\ \frac{1}{12}(U_{j_0}^n - 2U_{j_1}^n + U_{j_2}^n) \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} U_i^n \\ \frac{1}{4}(U_{i-2}^n - 4U_{i-1}^n + 3U_i^n) \\ \frac{1}{12}(U_{i-2}^n - 2U_{i-1}^n + U_i^n) \end{pmatrix}^T, \\
 \mathbf{w}^{(i,0)}(t_n) &= \begin{pmatrix} U_{j_1}^n \\ \frac{1}{4}(-U_{j_0}^n + U_{j_2}^n) \\ \frac{1}{12}(U_{j_0}^n - 2U_{j_1}^n + U_{j_2}^n) \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} U_i^n \\ \frac{1}{4}(-U_{i-1}^n + U_{i+1}^n) \\ \frac{1}{12}(U_{i-1}^n - 2U_i^n + U_{i+1}^n) \end{pmatrix}^T, \\
 \mathbf{w}^{(i,1)}(t_n) &= \begin{pmatrix} U_{j_0}^n \\ \frac{1}{4}(-3U_{j_0}^n + 4U_{j_1}^n - U_{j_2}^n) \\ \frac{1}{12}(U_{j_0}^n - 2U_{j_1}^n + U_{j_2}^n) \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} U_i^n \\ \frac{1}{4}(-3U_i^n + 4U_{i+1}^n - U_{i+2}^n) \\ \frac{1}{12}(U_i^n - 2U_{i+1}^n + U_{i+2}^n) \end{pmatrix}^T
 \end{aligned} \tag{3.45}$$

ergeben. Gem. (3.33) werden die drei orthogonalen Polynome über die nichtlinearen Gewichte ω_{-1} , ω_0 und ω_1 kombiniert, die gem. (3.34) von Konstanten λ_{-1} , λ_0 , λ_1 , r und ε , sowie von den variablen Oszillationsindikatoren σ_s abhängen:

$$\omega_s = \frac{\lambda_s(\sigma_s + \varepsilon)^{-r}}{\lambda_{-1}(\sigma_{-1} + \varepsilon)^{-r} + \lambda_0(\sigma_0 + \varepsilon)^{-r} + \lambda_1(\sigma_1 + \varepsilon)^{-r}}. \tag{3.46}$$

Die Oszillationsindikatoren σ_s lauten gem. (3.35)

$$\begin{aligned}
 \sigma_{-1} &= \frac{13}{12} \cdot (U_{i-2}^n - 2U_{i-1}^n + U_i^n)^2 + \frac{1}{4} \cdot (U_{i-2}^n - 4U_{i-1}^n + 3U_i^n)^2, \\
 \sigma_0 &= \frac{13}{12} \cdot (U_{i-1}^n - 2U_i^n + U_{i+1}^n)^2 + \frac{1}{4} \cdot (U_{i-1}^n - U_{i+1}^n)^2, \\
 \sigma_1 &= \frac{13}{12} \cdot (U_i^n - 2U_{i+1}^n + U_{i+2}^n)^2 + \frac{1}{4} \cdot (3U_i^n - 4U_{i+1}^n + U_{i+2}^n)^2.
 \end{aligned} \tag{3.47}$$

Somit lautet gem. (3.33) das lokale Polynom $U_i^n(x)$ für die Zelle C_i

$$U_i^n(x) = \left(\omega_{-1} \cdot \mathbf{w}^{(i,-1)}(t_n) + \omega_0 \cdot \mathbf{w}^{(i,0)}(t_n) + \omega_1 \cdot \mathbf{w}^{(i,1)}(t_n) \right) \cdot \mathbf{L}_0^2(x) \tag{3.48}$$

Zeitliche Entwicklung des Polynoms

Das lokale Polynom $U_i^n(x)$ der Gitterzelle C_i mit Mittelpunkt x_i lässt sich mittels der Taylor-Entwicklung (3.36) bis zur dritten Ordnung zu einem Ort-Zeit Polynom $U_i(x, t)$ entwickeln:

$$\begin{aligned}
 U_i(x, t) = & U_i^n(x_i) + (x - x_i) \cdot \frac{\partial(U_i^n(x_i))}{\partial x} - (t - t_n) \cdot \widetilde{M}(U_i^n(x_i)) \cdot \frac{\partial(U_i^n(x_i))}{\partial x} \\
 & + \frac{1}{2} \cdot (x - x_i)^2 \cdot \frac{\partial^2(U_i^n(x_i))}{\partial x^2} \\
 & - (x - x_i) \cdot (t - t_n) \cdot \frac{\partial \widetilde{M}(U_i^n(x_i))}{\partial x} \cdot \frac{\partial(U_i^n(x_i))}{\partial x} \\
 & - (x - x_i) \cdot (t - t_n) \cdot \widetilde{M}(U_i^n(x_i)) \cdot \frac{\partial^2(U_i^n(x_i))}{\partial x^2} \\
 & + (t - t_n)^2 \cdot \widetilde{M}(U_i^n(x_i)) \cdot \frac{\partial \widetilde{M}(U_i^n(x_i))}{\partial x} \cdot \frac{\partial(U_i^n(x_i))}{\partial x} \\
 & + \frac{1}{2} (t - t_n)^2 \cdot \widetilde{M}(U_i^n(x_i)) \cdot \widetilde{M}(U_i^n(x_i)) \cdot \frac{\partial^2(U_i^n(x_i))}{\partial x^2}.
 \end{aligned} \tag{3.49}$$

Der Wert $U_i^n(x_i)$ ergibt sich durch

$$U_i^n(x_i) \stackrel{(3.48)}{=} \left(\omega_{-1} \cdot \mathbf{w}^{(i,-1)}(t_n) + \omega_0 \cdot \mathbf{w}^{(i,0)}(t_n) + \omega_1 \cdot \mathbf{w}^{(i,1)}(t_n) \right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \tag{3.50}$$

Die erste Ableitung von $U_i^n(x_i)$ nach x lautet

$$\frac{\partial(U_i^n(x_i))}{\partial x} = \left(\omega_{-1} \cdot \mathbf{w}^{(i,-1)}(t_n) + \omega_0 \cdot \mathbf{w}^{(i,0)}(t_n) + \omega_1 \cdot \mathbf{w}^{(i,1)}(t_n) \right) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{2}{\Delta x} \\ 0 \end{pmatrix} \tag{3.51}$$

und die zweite Ableitung von $U_i^n(x_i)$ nach x ergibt sich durch

$$\frac{\partial^2(U_i^n(x_i))}{\partial x^2} = \left(\omega_{-1} \cdot \mathbf{w}^{(i,-1)}(t_n) + \omega_0 \cdot \mathbf{w}^{(i,0)}(t_n) + \omega_1 \cdot \mathbf{w}^{(i,1)}(t_n) \right) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{12}{\Delta x^2} \end{pmatrix}. \tag{3.52}$$

Die Ableitung der Matrix \widetilde{M} nach $U_i^n(x_i)$ erfolgt entweder analytisch (sofern die Form der Matrixeinträge dies zulassen) oder ansonsten mittels numerischer Differentiation mit ausreichender Genauigkeit.

Schema dritter Ordnung

Mit Anwendung des Schemas (3.40) liegt ein Verfahren dritter Ordnung vor. Die in dem Verfahren vorkommende Ableitung der hergeleiteten Ort-Zeit Funktion lautet

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_i(x, t)}{\partial x} &= \frac{\partial(U_i^n(x_i))}{\partial x} + (x - x_i) \cdot \frac{\partial^2(U_i^n(x_i))}{\partial x^2} \\ &\quad - (t - t_n) \cdot \frac{\partial \widetilde{M}(U_i^n(x_i))}{\partial(U_i^n(x_i))} \cdot \frac{\partial(U_i^n(x_i))}{\partial x} \cdot \frac{\partial(U_i^n(x_i))}{\partial x} \\ &\quad - (t - t_n) \cdot \widetilde{M}(U_i^n(x_i)) \cdot \frac{\partial^2(U_i^n(x_i))}{\partial x^2}. \end{aligned} \quad (3.53)$$

3.6 Simulation akademischer Probleme zur Verifikation

Im Folgenden wird durch die Simulation von akademischen Problemen das implementierte Verfahren verifiziert und das PRICE-C Verfahren einer Konvergenzanalyse unterzogen.

3.6.1 Advektionsgleichung

Eine sehr einfache partielle Differentialgleichung ist die Advektionsgleichung (oder auch lineare Transportgleichung) in einer Raumdimension. Sie hat die Form

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \alpha \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (3.54)$$

für $u(x, t): \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und $\alpha \in \mathbb{R}^+$. Diese Gleichung bedeutet nichts anderes, als dass die Anfangsdaten in unveränderter Form mit der Geschwindigkeit α in Richtung der positiven x -Achse transportiert werden.

Für die Geschwindigkeit $\alpha = 0.01$ wird mit den Anfangsdaten

$$u(x, 0) = \sin^6(\pi x) \text{ für } x \in [0, 1] \quad (3.55)$$

Gitterzellen	L_1	$\mathcal{O}(L_1)$	L_2	$\mathcal{O}(L_2)$	L_∞	$\mathcal{O}(L_\infty)$
100	$7.05 \cdot 10^{-2}$	–	$9.52 \cdot 10^{-3}$	–	$1.93 \cdot 10^{-3}$	–
200	$8.61 \cdot 10^{-3}$	3.03	$8.12 \cdot 10^{-4}$	3.55	$1.18 \cdot 10^{-4}$	4.03
400	$9.41 \cdot 10^{-4}$	3.19	$6.27 \cdot 10^{-5}$	3.69	$6.47 \cdot 10^{-6}$	4.19
600	$2.13 \cdot 10^{-4}$	3.66	$1.16 \cdot 10^{-5}$	4.16	$9.76 \cdot 10^{-7}$	4.66
800	$5.04 \cdot 10^{-5}$	5.01	$2.38 \cdot 10^{-6}$	5.51	$1.73 \cdot 10^{-7}$	6.01

Tabelle 3.1: Konvergenzanalyse für die Advektionsgleichung (3.54) mit Anfangsdaten (3.55) und Randwerten (3.56) für die PRICE-C Methode 3. Ordnung.

und den Randwerten

$$u(0, t) = \sin^6(\pi(0 - \alpha \cdot t)) , \quad u(1, t) = \sin^6(\pi(1 - \alpha \cdot t)) \quad (3.56)$$

eine Konvergenzanalyse bis zum Zeitpunkt $t = 100$ durchgeführt, dessen Ergebnisse in Tabelle 3.1 dargestellt sind. Es lässt sich erkennen, dass das Verfahren die Ordnung drei liefert. In Abbildung 3.2 ist der Verfahrensfehler in Abhängigkeit von der Schrittweite aufgetragen. Die unterschiedliche Güte der Verfahren erster und dritter Ordnung lassen sich dort erkennen. In Abbildung 3.3 sind die Simulationsergebnisse für 25 Zellen dargestellt.

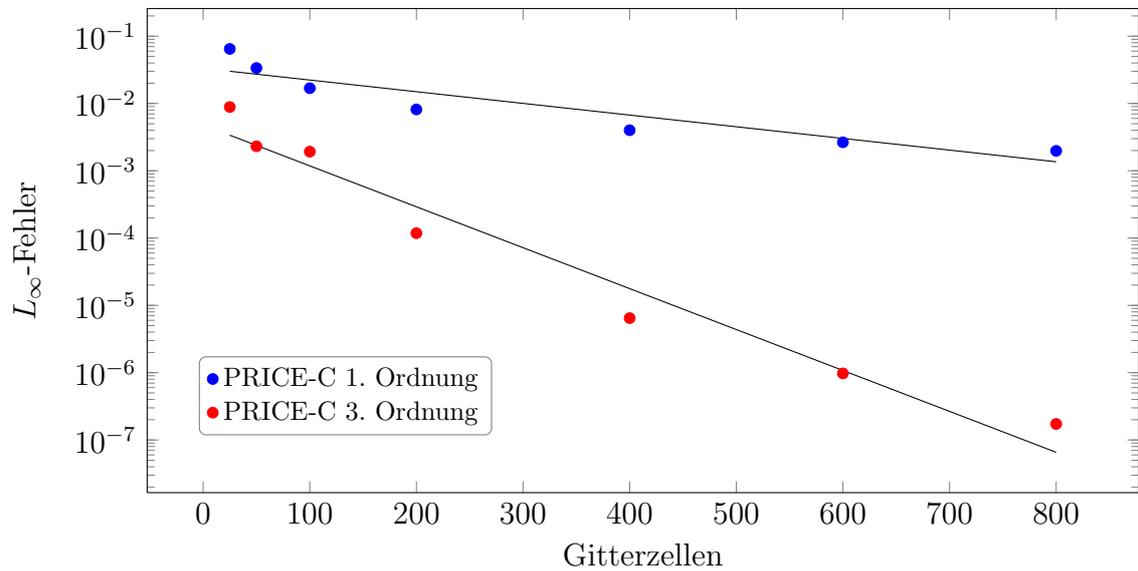


Abbildung 3.2: Konvergenzanalyse für die Advektionsgleichung (3.54) mit Anfangsdaten (3.55) und Randwerten (3.56) für die PRICE-C Methode 3. Ordnung.

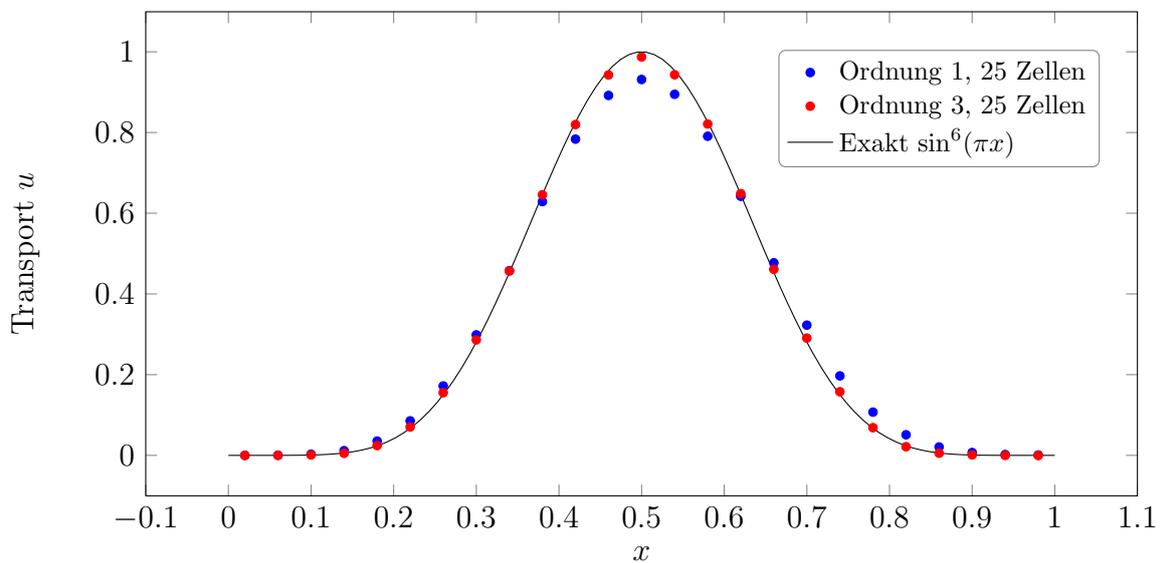


Abbildung 3.3: Simulationsergebnisse der Advektionsgleichung zum Zeitpunkt $t = 100$ für das PRICE-C Schema erster und dritter Ordnung.

3.6.2 Flachwassergleichungen

Die Flachwassergleichungen⁵ haben gem. [6] die Form

$$\frac{\partial u}{\partial t} + A \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad (3.57)$$

$$u = \begin{pmatrix} H \\ q \\ b \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ gh - c^2 & 2c & c^2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

mit $c = q/h$, der Bodenerhebung H , dem Abfluss q , der Topographie des Bodens b , der Wassertiefe $h = H - b$ und der Gravitationskraft $g = 9.81$. Der maximale Eigenwert wird in jedem Zeitschritt mit $\lambda_{\max} = \max_i |q + \sqrt{g \cdot h}|$ über alle Zellen i berechnet.

Kleine Störung des stationären Zustands nach LeVeque

Der von LeVeque [22] vorgeschlagene Test überprüft, ob ein Schema die Ausbreitung eines kleinen Stoßes erfassen kann. Für $x \in [0, 2]$ ist die Topographie gegeben durch

$$b(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} \cdot (\cos(10\pi(x - \frac{3}{2})) + 1) & \frac{7}{5} \leq x \leq \frac{8}{5} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (3.58)$$

und die Initialwerte durch

$$q(x, 0) = 0 \quad \text{und} \quad H(x, 0) = \begin{cases} 1 + \varepsilon & \frac{11}{10} \leq x \leq \frac{12}{10} \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}. \quad (3.59)$$

Die Randwerte sind durch $q(0, t) = 0$ und $H(0, t) = 1$ gegeben. Die Simulationsergebnisse sind für den Zeitpunkt $t = 0.2$ für $\varepsilon = 0.2$ in Abbildung (3.4) und für $\varepsilon = 0.001$ in Abbildung (3.5) dargestellt.

⁵engl.: Shallow Water Equations

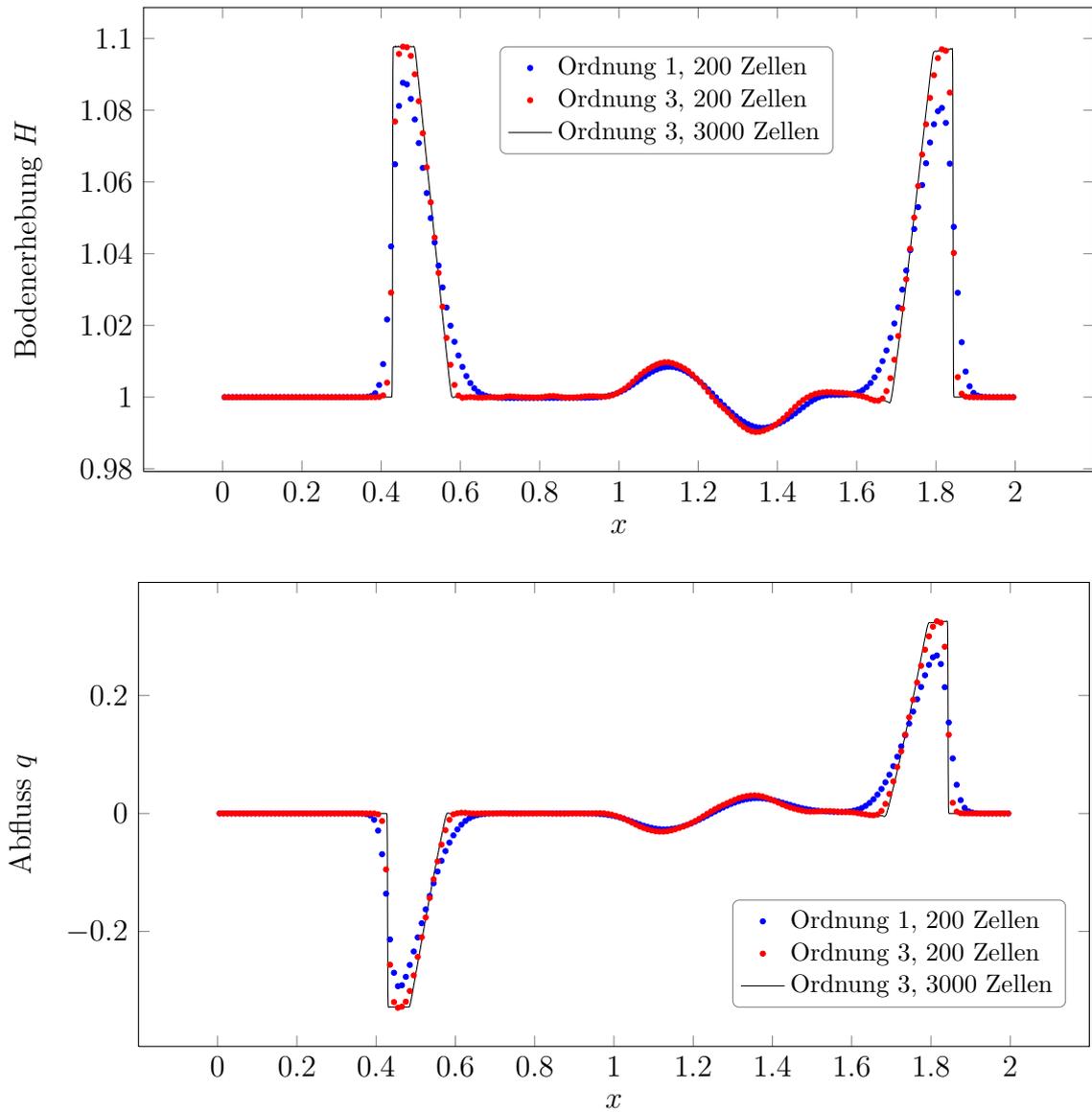


Abbildung 3.4: Simulationsergebnisse der Flachwassergleichungen für das Problem „Kleine Störung des stationären Zustands“ mit $\varepsilon = 0.2$ zum Zeitpunkt $t = 0.2$, PRICE-C Schema erster und dritter Ordnung bei verschiedenen Auflösungen.

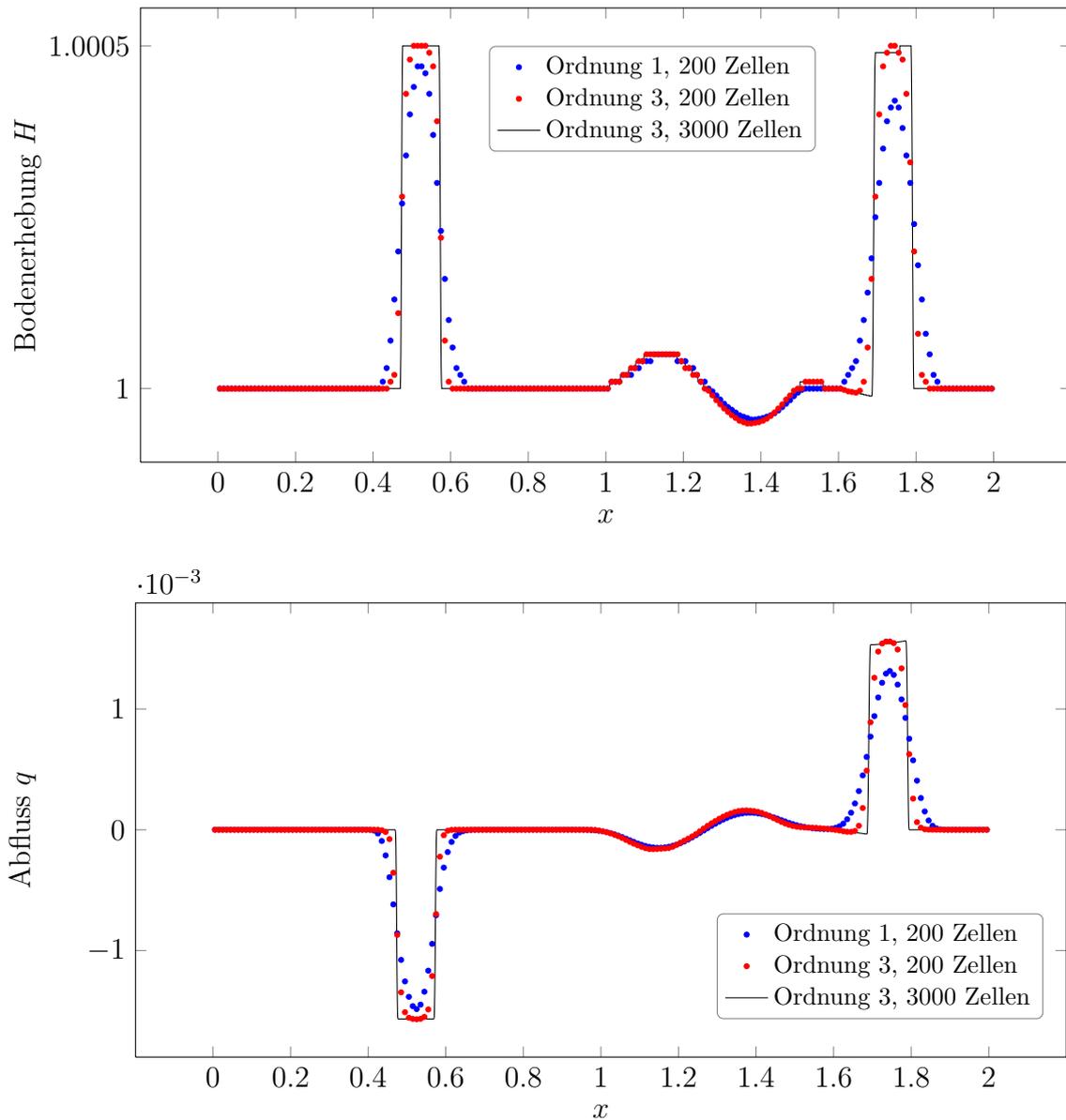


Abbildung 3.5: Simulationsergebnisse der Flachwassergleichungen für das Problem „Kleine Störung des stationären Zustands“ mit $\varepsilon = 0.001$ zum Zeitpunkt $t = 0.2$, PRICE-C Schema erster und dritter Ordnung bei verschiedenen Auflösungen.

3.6.3 Euler-Gleichungen der Gasdynamik

Die Euler-Gleichungen lauten in der nichtkonservativen Form

$$\frac{\partial u}{\partial t} + A \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad (3.60)$$

$$u = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho v \\ E \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -v^2 & 2v & 0 \\ -\frac{v(E+p)}{\rho} & \frac{E+p}{\rho} & v \end{pmatrix}, \quad p = (\gamma - 1) \cdot \left(E - \frac{1}{2} \rho v^2 \right).$$

Es bezeichnet ρ die Dichte, v die Geschwindigkeit, E die Energie, p den Druck und γ den Isentropenexponenten, der für Luft mit $\gamma = 1.4$ gewählt wird. Der maximale Eigenwert wird mit $\lambda_{\max} = 3.6$ festgelegt. Das System wird auf $x \in [0, 1]$ als Riemann-Problem gelöst mit den Initialdaten

$$u(x, 0) = \begin{cases} u_L & x \leq \frac{1}{2} \\ u_R & x > \frac{1}{2} \end{cases}. \quad (3.61)$$

Sod [31] hat ein Stoßrohr-Problem⁶ definiert, bei dem die Initialwerte durch

$$u_L = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2.5 \end{pmatrix}, \quad u_R = \begin{pmatrix} 0.125 \\ 0 \\ 0.25 \end{pmatrix} \quad (3.62)$$

gewählt werden. Die Simulationsergebnisse sind für den Zeitpunkt $t = 0.1644$ in Abbildung (3.6) dargestellt.

⁶engl.: Shock Tube Problem

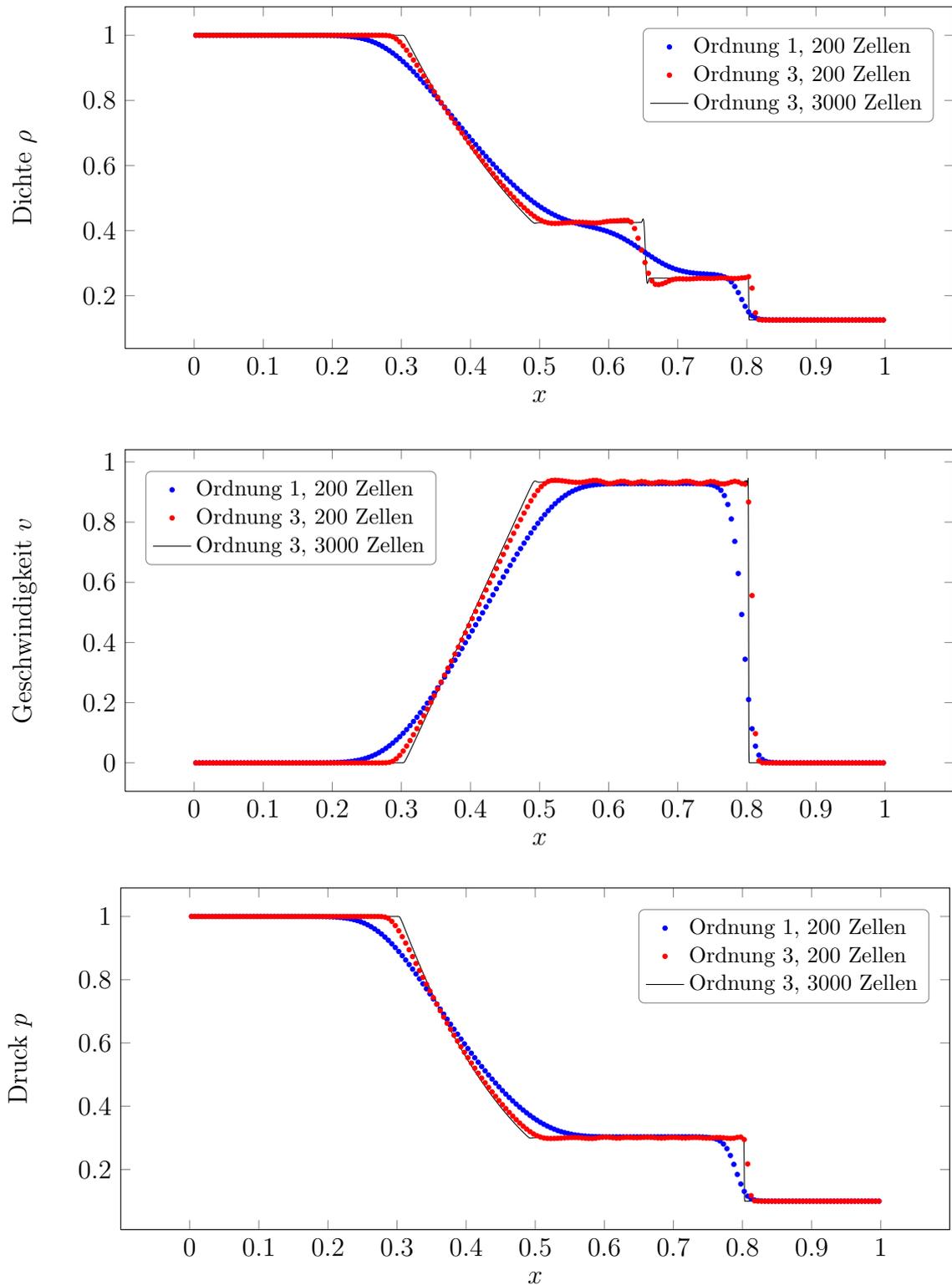


Abbildung 3.6: Simulationsergebnisse der Euler-Gleichungen für das Stoßrohr-Problem von Sod zum Zeitpunkt $t = 0.1644$, PRICE-C Schema erster und dritter Ordnung bei verschiedenen Auflösungen.

Simulationssoftware

Im Rahmen der Diplomarbeit wurde eine Simulationssoftware in der objektorientierten Programmiersprache C++ implementiert, die das transiente Verhalten der solaren Rohrströmung abbildet. Das Programm wurde mit der Bibliothek *OpenMP*¹ parallelisiert, so dass auf Multiprozessor-Computern das numerische Verfahren mit beschleunigter Geschwindigkeit gelöst werden kann.

Im Folgenden wird der Aufbau der Software vorgestellt und Simulationsergebnisse präsentiert.

4.1 Struktur und Aufbau der Simulationssoftware

Die Simulationssoftware wurde so aufgebaut, dass das numerische Verfahren von der Problemstellung entkoppelt ist. Dazu wurde die von objektorientierten Programmiersprachen angebotene *Vererbung* genutzt, bei der die Basisklasse `fvm` sich ausschließlich mit dem numerischen Verfahren befasst und die Unterklasse `pipe` die Basisklasse erbt und diese mit ihren spezifischen Daten (z.B. Rohrparameter) und Methoden (z.B. Bestimmung der Systemmatrix) ergänzt. Neben diesen beiden Klassen umfasst die Software noch die beiden Module `linearalgebra` und `fluid`.

4.1.1 Schnittstellen und Steuerung

Die Ansteuerung der Simulationssoftware lässt sich in vier Kategorien unterteilen, die im Folgenden diskutiert werden.

¹engl.: Open Multi-Processing

Instanziierung

Zur Instanziierung einer Rohrströmungssimulation müssen Rohrparameter als auch Parameter für das numerische Verfahren übergeben werden. In Tabelle 4.1 sind alle Parameter angegeben.

Parameter	Einheit
Ordnung der Methode	LOW_ORDER oder HIGH_ORDER
Anzahl der Gitterzellen	–
Initiale Werte der Gitterzellen	–
Rohrlänge	m
Rohrinnendurchmesser	m
Rohraußendurchmesser	m
Rauheit des Rohres	m
Wärmeleitung des Rohres	W/(m K)
Dichte des Rohres	kg/m ³
spez. Wärmekapazität des Rohres	J/(kg K)
Wärmeverlust-Koeffizient	W/(m K)
Wärmeverlust-Koeffizient	W/(m K ⁴)

Tabelle 4.1: Modellparameter bei der Instanziierung.

Initial wird das Fluid in jeder Gitterzelle durch Werte für Massenstrom, Druck und spezifische Enthalpie (siehe Tabelle 4.2) definiert. Diese Werte werden dabei in Form einer Matrix angegeben, in dessen j -ten Spalteneintrag die Werte der j -ten Gitterzelle stehen.

Parameter	Index	Einheit
Massenstrom	PIPEFLOW_MASSFLOW	kg/s
Druck	PIPEFLOW_PRSSSURE	bar
Spez. Enthalpie	PIPEFLOW_ENTHALPY	kJ/kg

Tabelle 4.2: Initiale Werte für jede Gitterzelle.

Der Befehl zur Erzeugung der Instanz `my_pipe` vom Objekt `pipe` lautet:

```
pipe my_pipe(PARAMETER_TABELLE_4.1);
```

Randbedingungen setzen

Die Randbedingungen bestehen aus der Angabe des Massenstroms und der spez. Enthalpie am Rohreintritt, dem Druck am Rohraustritt und dem Wärmestrom (in W/m) für jede Gitterzelle (siehe Tabelle 4.3). Durch die zellenweise Angabe des Wärmestroms ist es möglich auch Wolkendurchzüge zu simulieren, indem den Gitterzellen unterschiedliche Sonneneinstrahlungen vorgegeben werden.

Parameter	Index	Einheit
Massenstrom	PIPEFLOW_MASSFLOW	kg/s
Druck	PIPEFLOW_PRSSSURE	bar
Spez. Enthalpie	PIPEFLOW_ENTHALPY	kJ/kg
Wärmestrom	–	W/m

Tabelle 4.3: Als Randbedingung wird Massenstrom, Druck und spez. Enthalpie als Vektor sowie der Wärmestrom angegeben.

Der Befehl zum Setzen der Randwerte der Instanz `my_pipe` lautet:

```
my_pipe.set_boundary_values(PARAMETER_TABELLE_4.3);
```

Rohrströmung simulieren

Die Rohrströmung kann bis zu einer vorgegebenen Zeit `time` (in Sekunden) simuliert werden. Der Befehl für die Instanz `my_pipe` lautet dazu:

```
my_pipe.simulate_until_time(time);
```

Simulationsergebnisse auslesen

Nach der Simulation lassen sich die Simulationsergebnisse zellenweise auslesen. In Tabelle 4.4 sind die Methoden für die entsprechenden auszulesenden Parameter angegeben. Beispielsweise zum Auslesen der Dichte in der Gitterzelle 40 für die Instanz `my_pipe` lautet der Befehl:

```
my_pipe.get_fluid_density_IN_kg_per_m3(40);
```

Im Folgenden wird auf die einzelnen Klassen und Module näher eingegangen.

Wert	Methode zum Auslesen der Zelle i	Einheit
Massenstrom	<code>get_fluid_mass_flow_IN_kg_per_s(i)</code>	kg/s
Druck	<code>get_fluid_pressure_IN_bar(i)</code>	bar
Temperatur	<code>get_fluid_temperature_IN_K(i)</code>	K
Geschwindigkeit	<code>get_fluid_velocity_IN_m_per_s(i)</code>	m/s
Spez. Enthalpie	<code>get_fluid_spec_enthalpy_IN_kJ_per_kg(i)</code>	kJ/kg
Rohrwand-Temperatur	<code>get_pipewall_temperature_IN_K(i)</code>	K
Dichte	<code>get_fluid_density_IN_kg_per_m3(i)</code>	kg/m ³
Dampfgehalt	<code>get_fluid_steam_quality_IN_01(i)</code>	–

Tabelle 4.4: Methoden zum Auslesen der Simulationsergebnisse.

4.1.2 Basisklasse `fvm`

Die Basisklasse `fvm` löst hyperbolische Differentialgleichungsprobleme in der nichtkonservativen Form

$$\frac{\partial U}{\partial t} + M(U) \cdot \frac{\partial U}{\partial x} = 0$$

mittels des PRICE-C Schemas. Das Verfahren erster und dritter Ordnung ist implementiert. Im Folgenden werden die wichtigen Daten und Methoden der Basisklasse vorgestellt.

Eine Instanz der Basisklasse `fvm` wird definiert durch die Angabe der folgenden Initialisierungsdaten:

- `int num_grid_cells` – Anzahl der Gitterzellen. Je größer der Wert, desto genauer aber auch aufwändiger ist die Berechnung mittels der Finiten Volumen Methode.
- `double length_x` – Länge des betrachteten Ortes.
- `double system_variables` – Anzahl der Systemvariablen.
- `char* space_series_file` – Name der Ortsreihen-Datei.
- `char* time_series_file` – Name der Zeitreihen-Datei.
- `int method_order` – Ordnung des Verfahrens.
- `int using_trivial_equation` – Gibt an, ob das System durch Hinzunahme einer trivialen Gleichung in die nichtkonservative Form umgeformt wurde.

Bei der Initialisierung wird die Diskretisierung von Ort `double Delta_x` und Zeit `double Delta_t` unter Berücksichtigung der CFL-Bedingung (siehe Gleichung (3.6) in Kapitel 3.1) durch die Methode `void set_time_discretisation(double max_eigenvalue, double max_time)` gewählt. Während der Simulation wird `Delta_t` unter Angabe des maximalen Eigenwerts `max_eigenvalue` zu jedem Zeitschritt neu berechnet. Der maximale Eigenwert berechnet sich dabei für jede Zelle `i` durch die virtuelle² Methode `virtual double get_max_eigenvalue(int i)`.

In Abhängigkeit von dem gewählten numerischen Verfahren wird die Anzahl der Geisterzellen `int num_ghost_cells` bestimmt. Es wird `Matrix volumes` angelegt, in der die Werte jeder Systemvariable und jeder Zelle (auch der Geisterzellen) gespeichert werden. Die geschützte³ Methode `void set_initial_values(Matrix initial_values)` belegt die Initialwerte von `Matrix volumes`. Mittels der öffentlichen⁴ Methode `void set_boundary_values(Vector boundary_values)` werden die Geisterzellen durch die übergebenen Randwerte `boundary_values` gesetzt. Dabei entscheidet der interne `Vector boundary_conditions` ob der Randwert links- oder rechtsseitig gesetzt wird. Durch Ausführen der privaten⁵ Methode `void extrapolate_ghost_cells()` werden die Geisterzellen (die nicht durch einen Randwert gesetzt werden) gemäß dem `Vector boundary_extrapolation_order` extrapoliert.

Mit dem Aufruf der öffentlichen Methode `void simulate_until_time(double time)` wird eine Simulation bis zum Zeitpunkt `time` ausgeführt. Die aktuelle Simulationszeit `double simulation_time` erhöht sich bei jedem Simulationszeitschritt um `Delta_t`. Ein Simulationsschritt wird durch die private Methode `void simulate_one_time_step()` ausgeführt. Je nach Verfahren wird jede Gitterzelle `i` entweder durch die private Methode `void calculate_low_order_grid_step(int i)` (Verfahren erster Ordnung) oder `void calculate_high_order_grid_step(int i)` (Verfahren dritter Ordnung) aktualisiert. Beim Verfahren dritter Ordnung müssen aber erst die ADER-Polynome jedes Gitters vorliegen, die durch die Methode `void calculate_ADER_polynomial(int i)` bestimmt werden. In den beiden Methoden zur Aktualisierung der einzelnen Gitterzel-

²`virtual`-Methoden bieten den abgeleiteten Klassen die Möglichkeit eine spezifische Version der Basisklassen-Methode zu erstellen.

³`protected`-Methoden sind halb-öffentliche Methoden, die nicht nur innerhalb der Klasse, sondern auch für Unterklassen verfügbar sind.

⁴`public`-Methoden sind innerhalb und außerhalb der Klasse aufrufbar.

⁵`private`-Methoden sind nur innerhalb der Klasse verfügbar.

len wird die geschützte Methode `virtual Matrix get_system_matrix_M(int i, Vector values)` verwendet, die bzgl. der Gitterzelle `i` und den Werten `values` die Systemmatrix bestimmt.

Während eines Simulationsschrittes werden die aktualisierten Werte zunächst in der Matrix `volumes_new_time_step` gespeichert. Erst nach Berechnung aller Zellen werden diese Werte in Matrix `volumes` übertragen. Durch diese Vorgehensweise werden die Lesedaten von den Schreibdaten getrennt, so dass die Berechnung der Gitterzellen vollständig parallel geschehen kann.

4.1.3 Unterklasse `pipe`

Die Unterklasse `pipe` erbt von der Basisklasse `fvm` und erweitert diese durch das solare Rohrströmungsproblem. Das bedeutet vor allem, dass die `virtual` Methoden der Basisklasse `fvm` entweder erweitert oder aber überschrieben werden.

Eine Instanz der Unterklasse `pipe` wird definiert durch die Angabe der folgenden Initialisierungsdaten:

- `int method_order` – Angabe der Ordnung des numerischen Verfahren durch die in `fvm` definierten Konstanten `LOW_ORDER` und `HIGH_ORDER`.
- `int num_grid_cells` – Anzahl der Gitterzellen. Je größer der Wert, desto genauer aber auch aufwändiger ist die Berechnung mittels der Finiten Volumen Methode.
- Matrix `initial_values` – Initiale Werte für Massenstrom, Druck und spez. Enthalpie für alle Gitterzellen (ohne Geisterzellen).
- `double pipe_length_IN_m` – Rohrlänge in Metern.
- `double pipe_diameter_int_IN_m` – Rohrinne Durchmesser in Metern.
- `double pipe_diameter_ext_IN_m` – Rohraußendurchmesser in Metern.
- `double pipe_roughness_inner_IN_m` – Rauheit des Rohrinne in Metern.
- `double pipe_wall_heat_conductivity_lambda_IN_W_per_mK` – Wärmeleitfähigkeit der Rohrwand in $W/(m \cdot K)$.
- `double pipe_wall_density_IN_kg_per_m3` – Dichte des Rohres in kg/m^3 .
- `double pipe_wall_spec_isobaric_heat_capacity_IN_J_per_kgK` – Spezifische Wärmekapazität der Rohrwand in $J/kg \cdot K$.

- `double pipe_heat_loss_factor_u1_IN_W_per_m2K` – Koeffizient u_1 für die Strahlungsverluste am Absorberrohr.
- `double pipe_heat_loss_factor_u4_IN_W_per_m2K4` – Koeffizient u_4 für die Strahlungsverluste am Absorberrohr.

Bei der Initialisierung werden die benötigten Parameter an die Basisklasse `fvm` übergeben, die Initialwerte der Gitterzellen gesetzt, sowie `Vector boundary_conditions` durch Werte `LEFT_BOUNDARY` oder `RIGHT_BOUNDARY` und `boundary_extrapolation_order` durch Werte 0 oder 1 definiert.

Durch die öffentliche Methode `void set_boundary_values(Vector boundary_values, Vector sun_irradiation_IN_W_per_m)` werden die Randwerte gesetzt und die solare Einstrahlung an den internen `Vector optical_heat_flow_IN_W` übergeben. Es ist dabei zu beachten, dass die in `Vector boundary_values` angegebenen Randwerte aus den drei Werten für Massenstrom, Druck und spez. Enthalpie des Fluides mit den Laufindizes `PIPEFLOW_MASSFLOW`, `PIPEFLOW_PRESSURE` und `PIPEFLOW_ENTHALPY` bestehen. Durch die private Methode `Vector translate_user_values(int i, Vector values)` werden die Werte intern in die Werte Geschwindigkeit, Druck, spez. Enthalpie und Rohrwandtemperatur mit den Laufindizes `VELOCITY`, `PRESSURE`, `ENTHALPY` und `WALLTEMP` umgerechnet.

Die private Methode `Matrix get_system_matrix_M(int i, Vector values)` ersetzt die in der Basisklasse erstellte Methode und berechnet hier die 5×5 Systemmatrix (3.15). Die benötigten Größen des Fluids lassen sich mit den Funktionen des Moduls `fluid` berechnen, in der die Zustandsgleichungen der IAPWS [38] implementiert sind (siehe Abschnitt 4.1.5). Durch die öffentlichen Methoden

- `double get_fluid_mass_flow_IN_kg_per_s(int grid_cell)`
- `double get_fluid_pressure_IN_bar(int grid_cell)`
- `double get_fluid_temperature_IN_K(int grid_cell)`
- `double get_fluid_velocity_IN_m_per_s(int grid_cell)`
- `double get_fluid_spec_enthalpy_IN_kJ_per_kg(int grid_cell)`
- `double get_pipewall_temperature_IN_K(int grid_cell)`
- `double get_fluid_density_IN_kg_per_m3(int grid_cell)`

- `double get_fluid_steam_quality_IN_01(int grid_cell)`

wird der Massenstrom, der Druck, die Fluidtemperatur, die Geschwindigkeit, die spezifische Enthalpie, die Rohrwandtemperatur, die Dichte des Fluides und der Dampfgehalt in der Gitterzelle `grid_cell` zurück gegeben.

4.1.4 Modul `linearalgebra`

Im Modul `linearalgebra` werden Funktionen zur Verfügung gestellt, die für die Finite Volumen Methode gebraucht werden. Dazu gehören die Definitionen von Vektoren, Matrizen und Tensoren sowie deren Operationen wie Addition und Multiplikation. Im Folgenden werden die implementierten Funktionen vorgestellt:

- `Vector` – Eigener Datentyp zur Darstellung eines Vektors mit `double` Einträgen.
- `Matrix` – Eigener Datentyp zur Darstellung einer Matrix mit `double` Einträgen.
- `Tensor` – Eigener Datentyp zur Darstellung eines Tensors mit `double` Einträgen.
- `Vector`-, `Matrix`- und `Tensor`-Operationen
 - Addition und Subtraktion von Vektoren,
 - Addition und Subtraktion von Matrizen,
 - Produkt zwischen Vektoren,
 - Produkt zwischen Matrizen,
 - Produkt zwischen Vektoren und Matrizen,
 - Produkt von Skalar mit Vektor oder Matrix,
 - Produkt von Tensor mit Vektor.
- `Matrix transpose(Matrix A)` – Berechnet die Transponierte zu Matrix `A`.
- `Matrix identity_matrix(int dimension)` – Bestimmt die Identitätsmatrix der Dimension `dimension`.
- `Vector pow(Vector v, double exponent)` – Potenziert die Einträge eines Vektors mit dem Exponenten `exponent`.

Für weitere Erläuterungen wird auf den kommentierten Quelltext verwiesen.

4.1.5 Modul `fluid`

Das Modul `fluid` bietet die Berechnung der Zustandsgrößen von Wasser gem. IAPWS [38]. Demnach wird der Zustandsbereich von Wasser in fünf Regionen unterteilt, in denen sich die Zustandsgrößen unterschiedlich berechnen lassen. Im Folgenden werden die implementierten Funktionen vorgestellt, die sich direkt oder indirekt durch die Kenntnis von Druck, spez. Enthalpie und Geschwindigkeit bestimmen lassen. Einige Funktionen wurden überladen um bei schon bekannten Größen eine schnellere Rechenzeit zu erreichen:

- Zustandsbereich
 - `int water_region (double p, double h)` – Bestimmung des Zustandsbereichs in Abhängigkeit von Druck `p` und spez. Enthalpie `h`.
 - `int water_region_p_rho (double p, double rho)` – Bestimmung des Zustandsbereichs in Abhängigkeit von Druck `p` und Dichte `rho`.
 - `int water_region_p_T (double p, double T)` – Bestimmung des Zustandsbereichs in Abhängigkeit von Druck `p` und Temperatur `T`.
- Spezifische Enthalpie
 - `double water_h(double p, double T)` – Bestimmung der spez. Enthalpie h [J/kg]⁶ in Abhängigkeit vom Druck `p` und Temperatur `T`.
 - `double water_h (int region, double p, double rho)` – Bestimmung der spez. Enthalpie h in Abhängigkeit vom Zustandsbereich `region`, Druck `p` und Dichte `rho`.
 - `double water_hL (double p)` – Bestimmung der spez. Enthalpie auf der Siedelinie h_{boil} in Abhängigkeit von Druck `p`.
 - `double water_hV (double p)` – Bestimmung der spez. Enthalpie auf der Taulinie h_{cond} in Abhängigkeit von Druck `p`.
- Massenstrom
 - `double water_massflow (double v, double p, double h, double area)` – Bestimmung des Massenstroms \dot{m} [kg/s] in Abhängigkeit von Geschwindigkeit `v`, Druck `p`, spez. Enthalpie `h` und Querschnittsfläche `area`.

⁶Einheit [J/kg] = [m²/s²]

- `double water_massflow (double v, double rho, double area)` – Bestimmung des Massenstroms \dot{m} in Abhängigkeit von Geschwindigkeit v , Dichte ρ und Querschnittsfläche `area`.
- Geschwindigkeit
 - `double water_velocity (double dot_m, double rho, double area)` – Bestimmung der Geschwindigkeit v [m/s] in Abhängigkeit von Massenstrom `dot_m`, Dichte ρ und Querschnittsfläche `area`.
 - `double water_velocity (double dot_m, double p, double h, double area)` – Bestimmung der Geschwindigkeit v in Abhängigkeit von Massenstrom `dot_m`, Druck p , spez. Enthalpie h und Querschnittsfläche `area`.
- Temperatur
 - `double water_T (double p, double h)` – Bestimmung der Temperatur T [K] in Abhängigkeit von Druck p und spez. Enthalpie h .
 - `double water_T (int region, double p, double h)` – Bestimmung der Temperatur T in Abhängigkeit vom Zustandsbereich `region`, Druck p und spez. Enthalpie h .
- Dichte
 - `double water_rho (double p, double h)` – Bestimmung der Dichte ρ in [kg/m³] in Abhängigkeit von Druck p und spez. Enthalpie h .
 - `double water_rho (int region, double p, double h)` – Bestimmung der Dichte ρ in Abhängigkeit vom Zustandsbereich `region`, Druck p und spez. Enthalpie h .
 - `double water_rho (int region, double p, double h, double T)` – Bestimmung der Dichte ρ in Abhängigkeit vom Zustandsbereich `region`, Druck p , spez. Enthalpie h und Temperatur T .
 - `double water_rhoL (double p)` – Bestimmung der Dichte auf der Siedelinie ρ_{boil} in Abhängigkeit von Druck p .
 - `double water_rhoV (double p)` – Bestimmung der Dichte auf der Taulinie ρ_{cond} in Abhängigkeit von Druck p .

- `double water_rho_Dp (double p, double h)` – Bestimmung der partiellen Ableitung der Dichte ρ nach Druck p in Abhängigkeit von Druck p und spez. Enthalpie h .
- `double water_rho_Dh (double p, double h)` – Bestimmung der partiellen Ableitung der Dichte ρ nach spez. Enthalpie h in Abhängigkeit von Druck p und spez. Enthalpie h .
- Totale Energie
 - `double water_E (double p, double h, double rho, double v)` – Bestimmung der totalen Energie E [J]⁷ in Abhängigkeit von Druck p und spez. Enthalpie h .
- Spezifische isobare Wärmekapazität
 - `double water_Cp (double p, double h)` – Bestimmung der spez. Wärmekapazität c_p [J/(kg K)]⁸ in Abhängigkeit von Druck p und spez. Enthalpie h .
 - `double water_Cp (int region, double p, double h, double T, double rho)` – Bestimmung der spezifischen Wärmekapazität c_p in Abhängigkeit vom Zustandsbereich `region`, Druck p , spez. Enthalpie h , Temperatur T und Dichte ρ .
- Wärmeleitfähigkeit
 - `double water_lambda (double T, double rho)` – Bestimmung der Wärmeleitfähigkeit λ [W/(m K)] in Abhängigkeit von Temperatur T und Dichte ρ .
- Dynamische Viskosität
 - `double water_eta (double p, double h)` – Bestimmung der dynamischen Viskosität η [Pa s]⁹ in Abhängigkeit von Druck p und spez. Enthalpie h .

⁷Einheit [J] = [Ws] = [m²kg/s²]

⁸Einheit [J/(kg K)] = [m²/(s² K)]

⁹Einheit [Pa s] = [kg/(m s)]

- `double water_eta (double p, double T, double rho)` – Bestimmung der dynamischen Viskosität η in Abhängigkeit von Druck p und Temperatur T und Dichte ρ .
- `double water_etaL (double T, double rho)` – Bestimmung der dynamischen Viskosität auf der Siedelinie η_{boil} in Abhängigkeit von Temperatur T und Dichte ρ , die sich gem. `water_T (p, h)` und `water_rho (p, h)` durch Druck p und spez. Enthalpie h bestimmen lassen.
- `double water_etaV (double T, double rho)` – Bestimmung der dynamischen Viskosität auf der Taulinie η_{cond} in Abhängigkeit von Temperatur T und Dichte ρ , die sich gem. `water_T (p, h)` und `water_rho (p, h)` durch Druck p und spez. Enthalpie h bestimmen lassen.
- Dampfgehalt
 - `double water_x (double p, double h)` – Bestimmung des Dampfgehalts x in Abhängigkeit von Druck p und spez. Enthalpie h .
- Reynolds-Zahl
 - `double water_reynolds (double dot_m, double p, double h, double radius)` – Bestimmung der Reynolds-Zahl Re_{κ} für Rohrradius r_{κ} in Abhängigkeit von Massenstrom \dot{m} , Druck p , spez. Enthalpie h und Rohrradius radius .
 - `double water_reynolds (double dot_m, double eta, double radius)` – Bestimmung der Reynolds-Zahl Re_{κ} für Rohrradius r_{κ} in Abhängigkeit von Massenstrom \dot{m} , dynamischer Viskosität η und Rohrradius radius .
- Prandtl-Zahl
 - `double water_prandtl (double p, double h)` – Bestimmung der Prandtl-Zahl Pr in Abhängigkeit von Druck p und spez. Enthalpie h .
 - `double water_prandtl (double Cp, double eta, double lambda)` – Bestimmung der Prandtl-Zahl Pr in Abhängigkeit von Wärmekapazität C_p , dynamischer Viskosität η und Wärmeleitfähigkeit λ .

Die Hilfsfunktionen der einzelnen Regionen werden hier nicht weiter angegeben. Für Erläuterungen wird auf den kommentierten Quelltext verwiesen.

Da die Gleichungen durch viele Iterationsschleifen sehr rechenaufwändig sind, wurde im Rahmen der Arbeit eine Wertetabelle erstellt, die den relevanten Bereich abdeckt. Mittels bilinearer Interpolation zwischen (p, h) -Werten werden die entsprechenden Größen ermittelt.

4.2 Beispielcode

Der folgende Beispielcode zeigt die Einstellmöglichkeiten eines Rohres. Es werden eine Instanz der Klasse `pipe` angelegt, Randwerte gesetzt, einige Zeitschritte simuliert und die Simulationsergebnisse ausgelesen.

```
#include <iostream>
#include "pipe.h"
using namespace std;

void main()
{
    // Definiere Rohrparameter
    int method_order = HIGH_ORDER;
    int num_grid_cells = 100;
    double pipe_length_IN_m = 100.0;
    double pipe_diameter_int_IN_m = 0.125;
    double pipe_diameter_ext_IN_m = 0.140;
    double pipe_roughness_inner_IN_m = 0.03E-3;
    double pipe_wall_heat_conductivity_lambda_IN_W_per_mK = 38.0;
    double pipe_wall_density_IN_kg_per_m3 = 7500.0;
    double pipe_wall_spec_isobaric_heat_capacity_IN_J_per_kgK = 540.0;
    double pipe_heat_loss_factor_u1_IN_W_per_m2K = 0.141;
    double pipe_heat_loss_factor_u4_IN_W_per_m2K4 = 6.48E-09;

    // Definiere Initialwerte
    Matrix initial_values(PIPE_SYSTEM_VAR, num_grid_cells);
    for (int i=0; i<num_grid_cells; i++)
    {
        initial_values[i][PIPEFLOW_MASSFLOW] = 1.4;           // kg/s
        initial_values[i][PIPEFLOW_PRESSURE] = 70.0;         // bar
        initial_values[i][PIPEFLOW_ENTHALPY] = 944.96;       // kJ/kg
    }
}
```

```

// Setze Randwerte
// (erhöhter Massenstrom am Rohreintritt und niedrigere
// Sonneneinstrahlung in zweiter Hälfte des Rohres)
Vector boundary(PIPE_SYSTEM_VAR);
boundary[PIPEFLOW_MASSFLOW] = 1.6;           // kg/s
boundary[PIPEFLOW_PRESSURE] = 70.0;         // bar
boundary[PIPEFLOW_ENTHALPY] = 944.96;       // kJ/kg

Vector ext_conductivity_IN_W_per_m(num_grid_cells);
for (int i=0; i<num_grid_cells/2; i++)
    ext_conductivity_IN_W_per_m[i] = 8000.0;
for (int i=num_grid_cells/2; i<num_grid_cells; i++)
    ext_conductivity_IN_W_per_m[i] = 7000.0;

// Lege Instanz der Klasse pipe an
pipe absorber_pipe(
    method_order,
    num_grid_cells,
    initial_values,
    pipe_length_IN_m,
    pipe_diameter_int_IN_m,
    pipe_diameter_ext_IN_m,
    pipe_roughness_inner_IN_m,
    pipe_wall_heat_conductivity_lambda_IN_W_per_mK,
    pipe_wall_density_IN_kg_per_m3,
    pipe_wall_spec_isobaric_heat_capacity_IN_J_per_kgK,
    pipe_heat_loss_factor_u1_IN_W_per_m2K,
    pipe_heat_loss_factor_u4_IN_W_per_m2K4);

// Setze Randwerte für die Absorberrohrinstanz
absorber_pipe.set_boundary_values(boundary, ext_conductivity_IN_W_per_m);

// Berechnung der nächsten Zeitschritts
double max_time = 45; // sec
absorber_pipe.simulate_until_time(max_time);

// Simulationsergebnisse
int cell = 1;
double simulation_time = absorber_pipe.get_simulation_time();
double massflow = absorber_pipe.get_fluid_mass_flow_IN_kg_per_s(cell);
double pressure = absorber_pipe.get_fluid_pressure_IN_bar(cell);
double fluid_temp = absorber_pipe.get_fluid_temperature_IN_K(cell);
double enthalpy = absorber_pipe.get_fluid_spec_enthalpy_IN_kJ_per_kg(cell);
double pipewall_temp = absorber_pipe.get_pipewall_temperature_IN_K(cell);
double density = absorber_pipe.get_fluid_density_IN_kg_per_m3(cell);
double steam = absorber_pipe.get_fluid_steam_quality_IN_01(cell);

```

```
cout << "Zelle "           << cell           << endl
      << "Simulationszeit " << simulation_time << endl
      << "Massenstrom "     << massflow       << endl
      << "Druck "           << pressure       << endl
      << "Fluidtemperatur " << fluid_temp    << endl
      << "Spez. Enthalpie "  << enthalpy      << endl
      << "Rohrtemperatur "  << pipewall_temp << endl
      << "Dichte "          << density        << endl
      << "Dampfgehalt "     << steam          << endl;
```

```
}
```

Simulationsergebnisse

Es gibt bereits zwei Simulationsprogramme, die in der FRESEMO¹-Studie [19] verglichen wurden. Im Folgenden werden die Modelle der beiden Simulationsprogramme kurz vorgestellt und anschließend Rohrströmungsszenarien der Studie nachsimuliert.

5.1 Simulationsprogramm ColSimQT vom Fraunhofer ISE

Das Modell zu *ColSimQT* [19] basiert auf der Massenbilanzgleichung und der Energiebilanzgleichung. Die Impulsbilanzgleichung wurde vernachlässigt und dafür der Druck konstant gewählt. Der Einfluss der Rohrwandtemperatur auf das Strömungsverhalten wird durch die Wärmeleitungsgleichung berücksichtigt. Die verwendete Massenbilanzgleichung lautet

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial x} = 0 \quad (5.1)$$

und die vereinfachte Energiebilanzgleichung lautet

$$\rho \frac{\partial h}{\partial t} + \rho v \frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\dot{Q}_{\text{int}}}{V_{\text{int}}} \quad (5.2)$$

mit der Schlussgleichung

$$p = \text{const} \quad (5.3)$$

und der Wärmeleitungsgleichung

$$c_{\text{wand}} \cdot \rho_{\text{wand}} \cdot \frac{\partial T_{\text{wand}}}{\partial t} = \frac{\dot{Q}_{\text{ext}} - \dot{Q}_{\text{int}}}{V_{\text{wand}}}. \quad (5.4)$$

¹Demonstration eines linearen Fresnel-Kollektors

Druckverluste und Reibungswärme werden nicht berücksichtigt.

Zur numerischen Lösung des Systems werden die Differentialquotienten mit Differenzenquotienten approximiert. In zwei halben Zeitschritten wird das System aktualisiert. Beim ersten Teilschritt wird die spezifische Enthalpie durch den konstanten Systemdruck und die aktuelle Geschwindigkeit berechnet, woraus sich mit Hilfe thermodynamischer Zustandsgleichungen² die dazugehörige Dichte ergibt. Aus der Dichteänderung wird durch Verwendung der diskretisierten Massenbilanzgleichung die Geschwindigkeit des halben Zeitschritts ermittelt. Basierend auf diesen Daten wird durch Verwendung der diskretisierten Energiebilanzgleichung die spezifische Enthalpie des neuen Zeitschritts ermittelt.

5.2 Simulationsprogramm DissDyn vom DLR

Das Modell zu *DissDyn* wurde von Hirsch [18] entwickelt und basiert ebenfalls auf nur zwei Erhaltungsgleichungen. Die Impulsgleichung wurde vernachlässigt und durch eine inverse Druckverlustbeziehung ersetzt, aus der sich der Massenstrom direkt bestimmen lässt. Wie beim Modell zu *ColSimQT* werden die Massenbilanzgleichung

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial x} = 0 \quad (5.5)$$

und die Energiebilanzgleichung

$$\rho \frac{\partial h}{\partial t} + \rho v \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\dot{Q}_{\text{int}}}{V_{\text{int}}} \quad (5.6)$$

verwendet. Als Schlussgleichung wird die inverse Druckverlustbeziehung nach [26] benutzt

$$\dot{m}(p, h). \quad (5.7)$$

Darüber hinaus wird der Einfluss der Rohrwandtemperatur auf das Strömungsverhalten durch die Verwendung der Wärmeleitungsgleichung

$$c_{\text{wand}} \cdot \rho_{\text{wand}} \cdot \frac{\partial T_{\text{wand}}}{\partial t} = \frac{\dot{Q}_{\text{ext}} - \dot{Q}_{\text{int}}}{V_{\text{wand}}} \quad (5.8)$$

²Verwendung der PROST-Bibliothek, die auf der IAPWS Abfassung 1984 basiert.

berücksichtigt.

Zur numerischen Lösung der gerichteten Strömung werden die Aufwind-Diskretisierung für Enthalpie und Massenstrom sowie die Abwind-Diskretisierung für den Druck angesetzt. Mit Verwendung der Differenzenquotienten werden zunächst die Bilanzgleichungen für Enthalpie und Druck gelöst. Anschließend wird durch Verwendung der inversen Druckverlustbeziehung und der Wärmeleitungsgleichung der Massenstrom und die Rohrwandtemperatur aktualisiert.

5.3 Simulationsszenarien

In der FRESDEMO-Studie [19] wurden anhand mehrerer Testfälle die beiden Simulationsprogramme *ColSimQT* und *DissDyn* verglichen und bewertet. Es wurden stationäre Verläufe definiert, aus denen durch Aufbringung von Transienten als Randwerte mehrere Rohrströmungsszenarien abgeleitet wurden.

Bei der Studie stellte sich heraus, dass sich bei beiden Programmen nahezu der gleiche stationäre Verlauf einstellt. Beide Programme beschreiben auch in sehr ähnlicher Weise das transiente Verhalten der Absorberrohrströmung. Jedoch traten bei *ColSimQT* Störungen in Form von starken Oszillationen auf und *DissDyn* konvergierte nicht bei allen Szenarien.

Parameter		Wert
Rohrinnendurchmesser	$2r_{\text{int}}$	0.125 m
Rohraussedurchmesser	$2r_{\text{ext}}$	0.140 m
spez. Wärmekapazität des Rohres	c_{wand}	540 J/(kg K)
Wärmeleitung des Rohres	λ_{wand}	38 W/(m K)
Dichte des Rohres	ρ_{wand}	7500 kg/m ³
Wärmeverlust-Koeffizient	u_1	0.141 W/(m K)
Wärmeverlust-Koeffizient	u_4	6.48E-09 W/(m K ⁴)

Tabelle 5.1: Modellparameter der Simulation.

Im Folgenden werden einige Rohrströmungsszenarien der Studie mit dem im Rahmen der Arbeit hergeleiteten Modell simuliert. Die Modellparameter werden gem. der in

Tabelle 5.1 definierten Werte gewählt. Für die folgenden Szenarien werden die Simulationsergebnisse von *ColSimQT* mit abgebildet.

5.3.1 Vorwärmmodus mit beginnender Verdampfung

Zur Simulation eines Vorwärmmodus werden die in Tabelle 5.2 festgelegten Werte gewählt. Durch diese Wahl liegt das Fluid im vorderen Bereich des Absorberrohres flüssig vor und beginnt im hinteren Bereich bereits mit der Verdampfung. Zum Zeitpunkt $t = 2000\text{s}$ liegt der in Abbildung 5.1 dargestellte Status vor.

Parameter		Wert
Rorlänge	ℓ	100 m
Massenstrom am Absorberrohreintritt	\dot{m}	1.4 kg/s
Druck am Absorberrohraustritt	p	70.0 bar
Spez. Enthalpie am Absorberrohreintritt	h	944.96 kJ/kg
Optische Strahlungsstärke konstant am gesamten Absorberrohr	q_{opt}	8000 W/m

Tabelle 5.2: Parameter zur Simulation des stationären Verlaufs beim Vorwärmmodus.

Positiver Drucksprung

Bezüglich des stationären Verlaufs des Vorwärmmodus erfolgt ein positiver Drucksprung am Absorberrohraustritt um 1.0 bar auf 71.0 bar. Der Status am Absorberrohreintritt bzw. -austritt nach einer Simulationszeit von 800s wird in Abbildung 5.2 dargestellt.

Negativer Einstrahlungssprung

Bezüglich des stationären Verlaufs des Vorwärmmodus erfolgt ein negativer Einstrahlungssprung am gesamten Absorber um 1000 W/m^2 auf 7000 W/m^2 . Der Status am Absorberrohreintritt bzw. -austritt nach einer Simulationszeit von 950s wird in Abbildung 5.3 dargestellt.

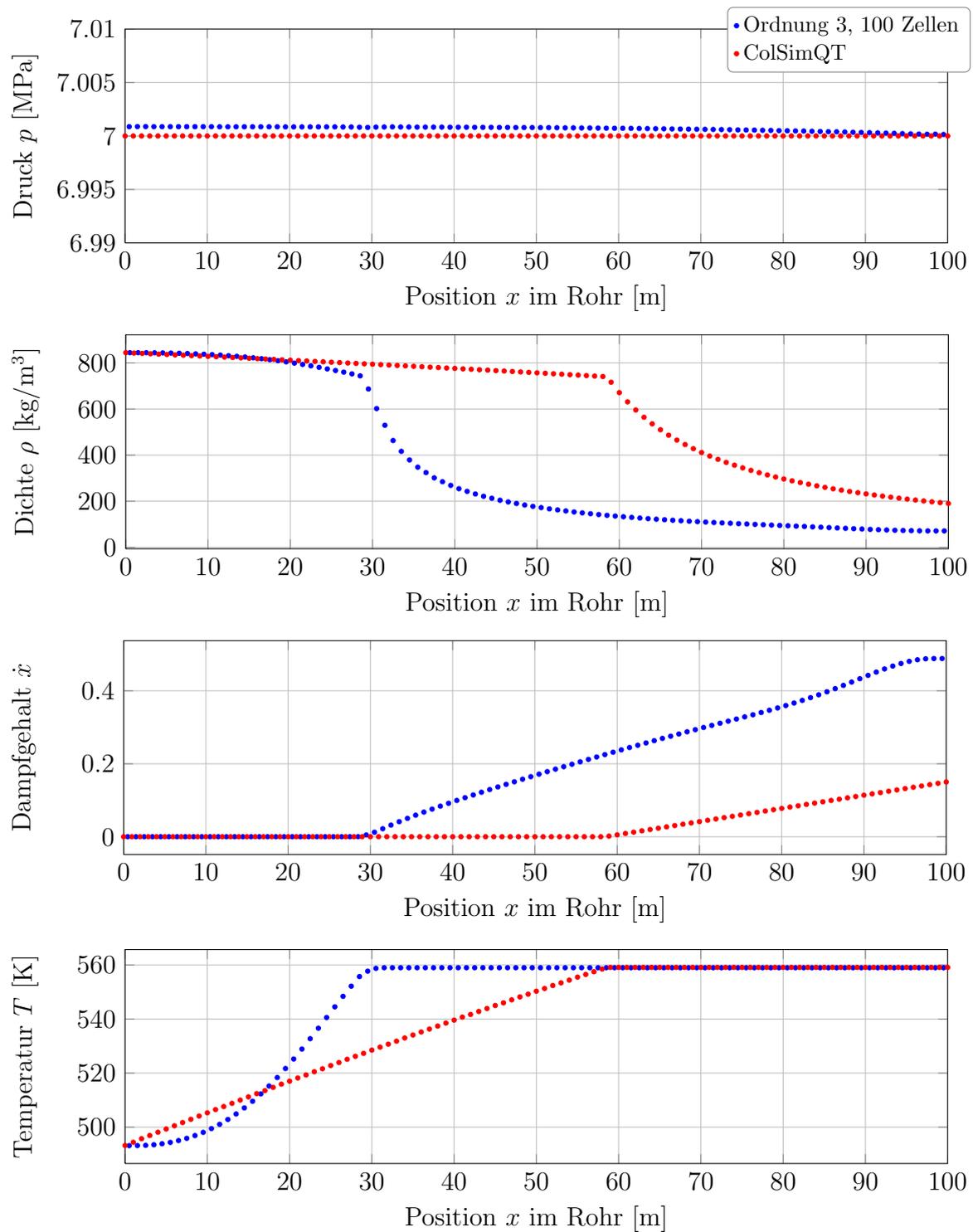


Abbildung 5.1: Simulationsergebnisse des Vorwärmmodus mit beginnender Verdampfung. Abgebildet ist der örtliche Verlauf des Drucks, der Dichte, des Dampfgehalts und der Temperatur.

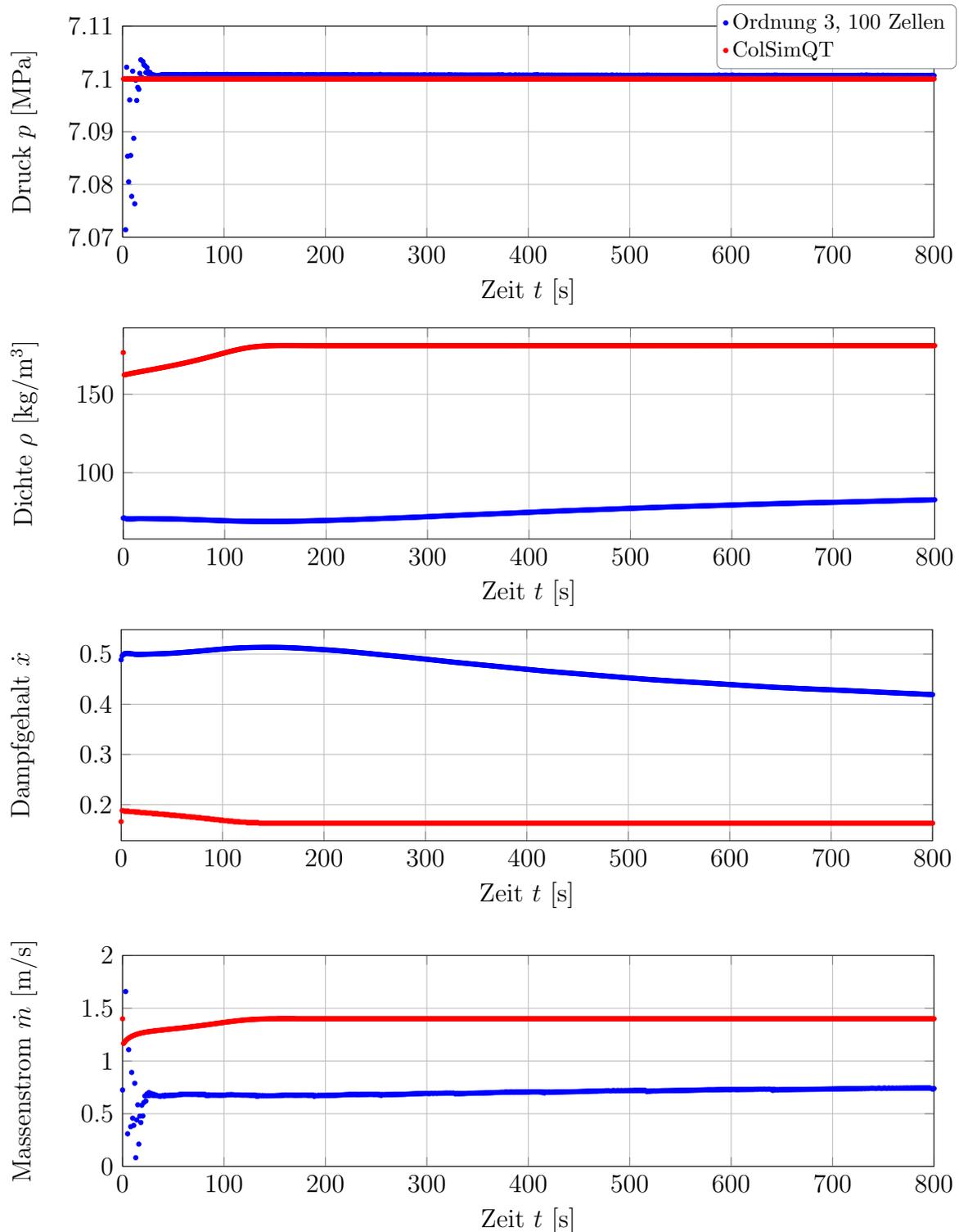


Abbildung 5.2: Simulationsergebnisse des Vorwärmmodus mit positivem Drucksprung. Abgebildet ist die zeitliche Entwicklung des Drucks am Rohreintritt, sowie der Dichte, des Dampfgehalts und des Massenstroms am Rohraustritt. Der Druck und Massenstrom des Verfahrens 3. Ordnung oszilliert zu Beginn des Schocks.

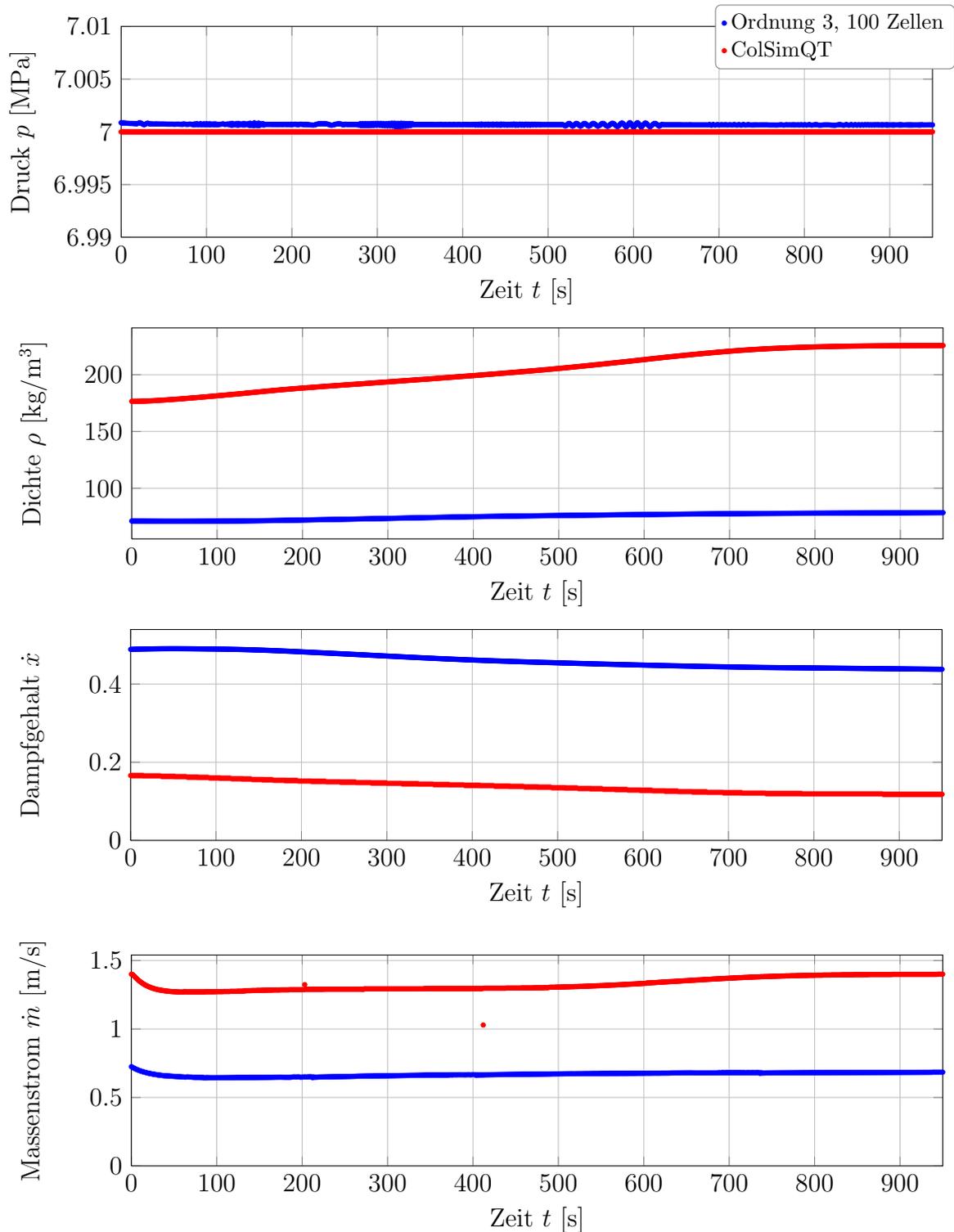


Abbildung 5.3: Simulationsergebnisse des Vorwärmmodus mit negativem Einstrahlungssprung. Abgebildet ist die zeitliche Entwicklung des Drucks am Rohreintritt, sowie der Dichte, des Dampfgehalts und des Massenstroms am Rohraustritt. Bei der Abbildung des Massenstroms fällt auf, dass *ColSimQT* Oszillationen während der Simulation aufweist.

5.3.2 Verdampfungsmodus

Zur Simulation des Verdampfungsmodus werden die in Tabelle 5.3 festgelegten Werte gewählt. Durch diese Wahl liegt das Wasser im gesamten Rohr zweiphasig vor. Zum Zeitpunkt $t = 1000\text{s}$ liegt der in Abbildung 5.4 dargestellte Status vor.

Parameter		Wert
Rorlänge	ℓ	100 m
Massenstrom am Absorberrohreintritt	\dot{m}	1.4 kg/s
Druck am Absorberrohraustritt	p	70.0 bar
Spez. Enthalpie am Absorberrohreintritt	h	1262.96 kJ/kg
Optische Strahlungsstärke konstant am gesamten Absorberrohr	q_{opt}	8000 W/m

Tabelle 5.3: Parameter zur Simulation des stationären Verlaufs beim Verdampfungsmodus.

Negativer Drucksprung

Bezüglich des stationären Verlaufs des Verdampfungsmodus erfolgt ein Drucksprung am Absorberrohraustritt um 1.0 bar auf 69.0 bar. Der Status am Absorberrohreintritt bzw. -austritt nach einer Simulationszeit von 300s wird in Abbildung 5.5 dargestellt.

Negativer Enthalpiesprung

Bezüglich des stationären Verlaufs des Verdampfungsmodus erfolgt ein negativer Enthalpiesprung am Absorberrohreintritt um 52.72 kJ/kg, was einer Temperaturreduktion von 10 K entspricht. Der Status am Absorberrohreintritt bzw. -austritt nach einer Simulationszeit von 500s wird in Abbildung 5.6 dargestellt.

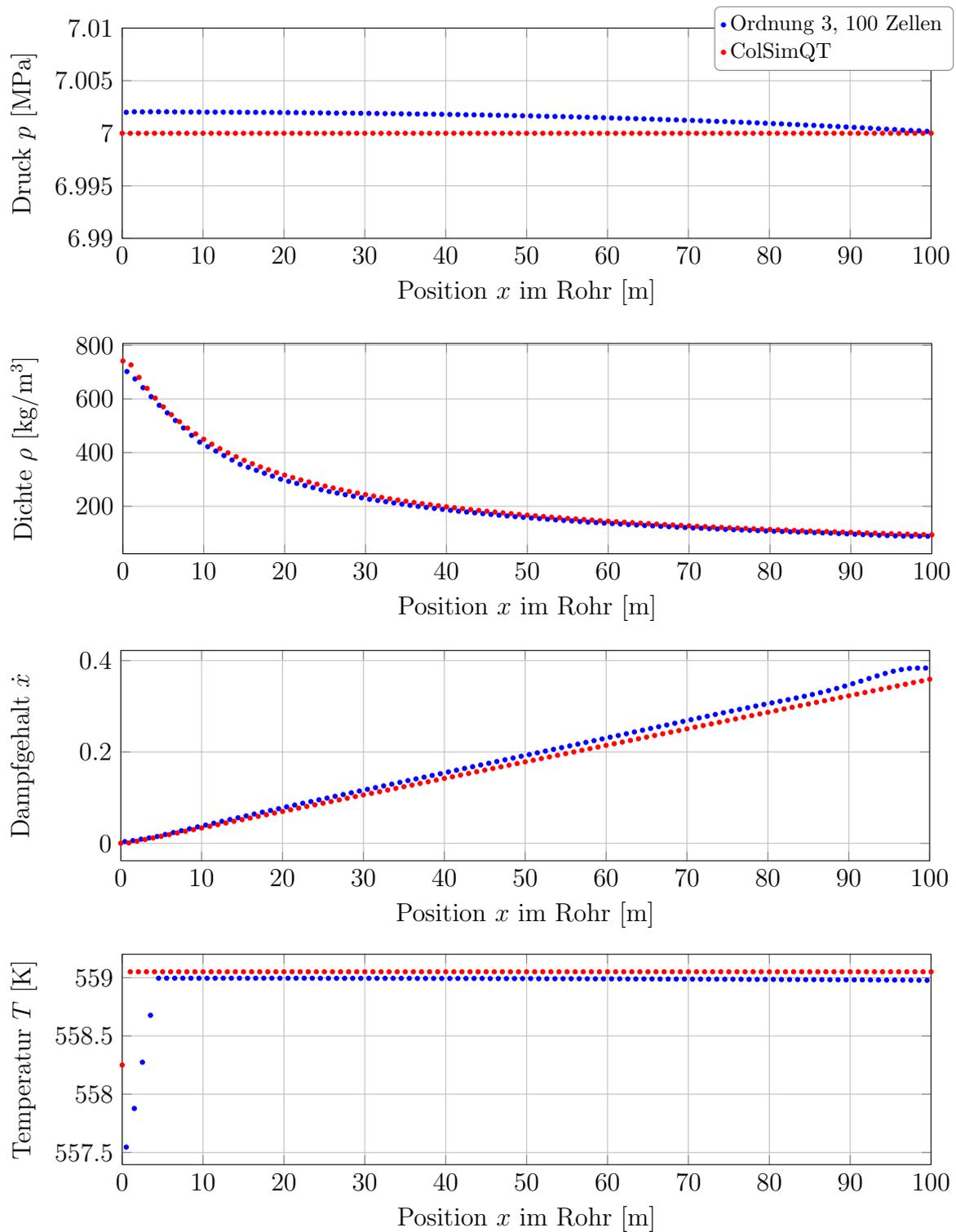


Abbildung 5.4: Simulationsergebnisse des Verdampfungsmodus. Abgebildet ist der örtliche Verlauf des Drucks, der Dichte, des Dampfgehalts und der Temperatur.

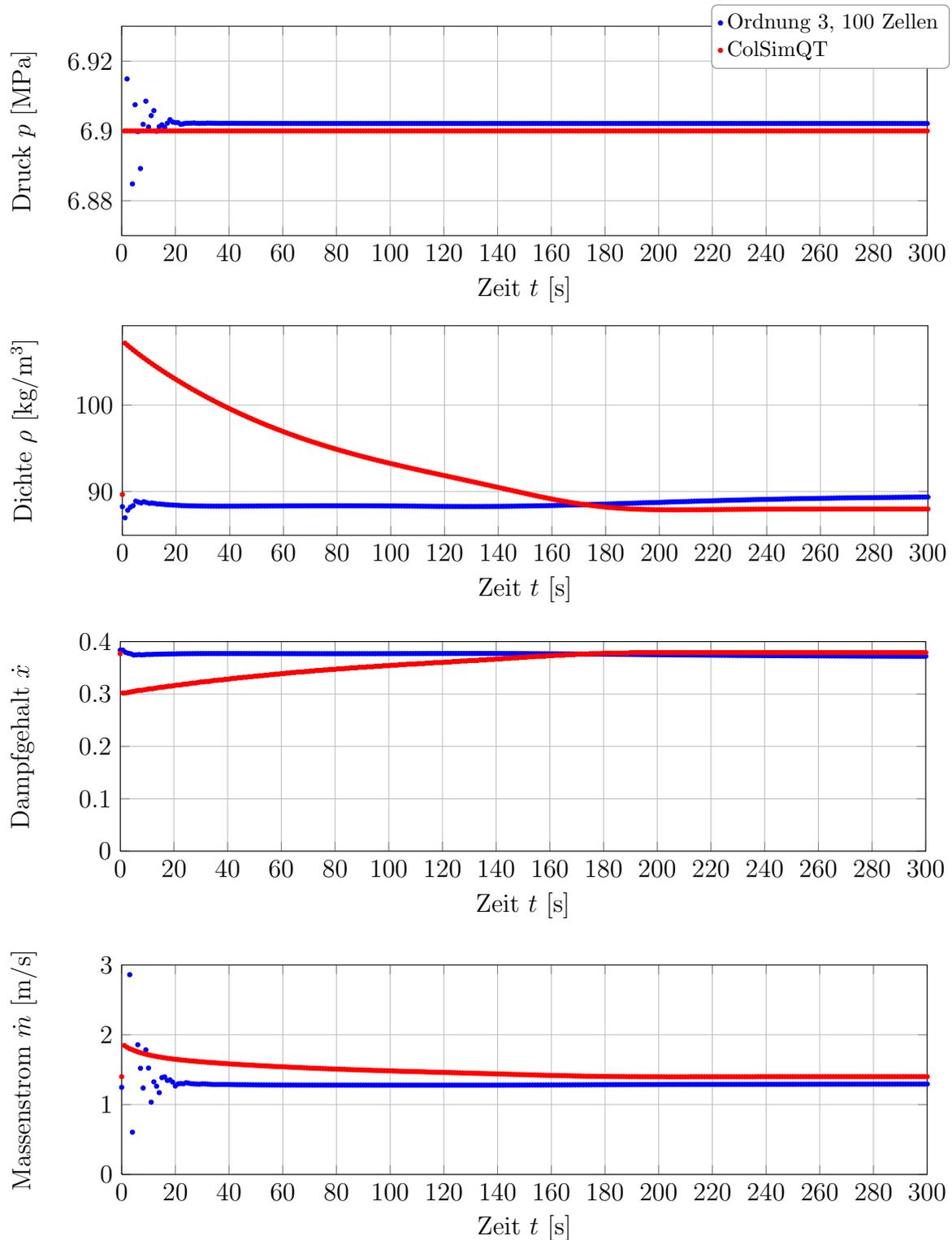


Abbildung 5.5: Simulationsergebnisse des Verdampfungsmodus mit negativem Drucksprung. Abgebildet ist die zeitliche Entwicklung des Drucks am Rohreintritt, sowie der Dichte, des Dampfgehalts und des Massenstroms am Rohraustritt. Der Druck und Massenstroms des Verfahrens 3. Ordnung oszilliert zu Beginn des Schocks.

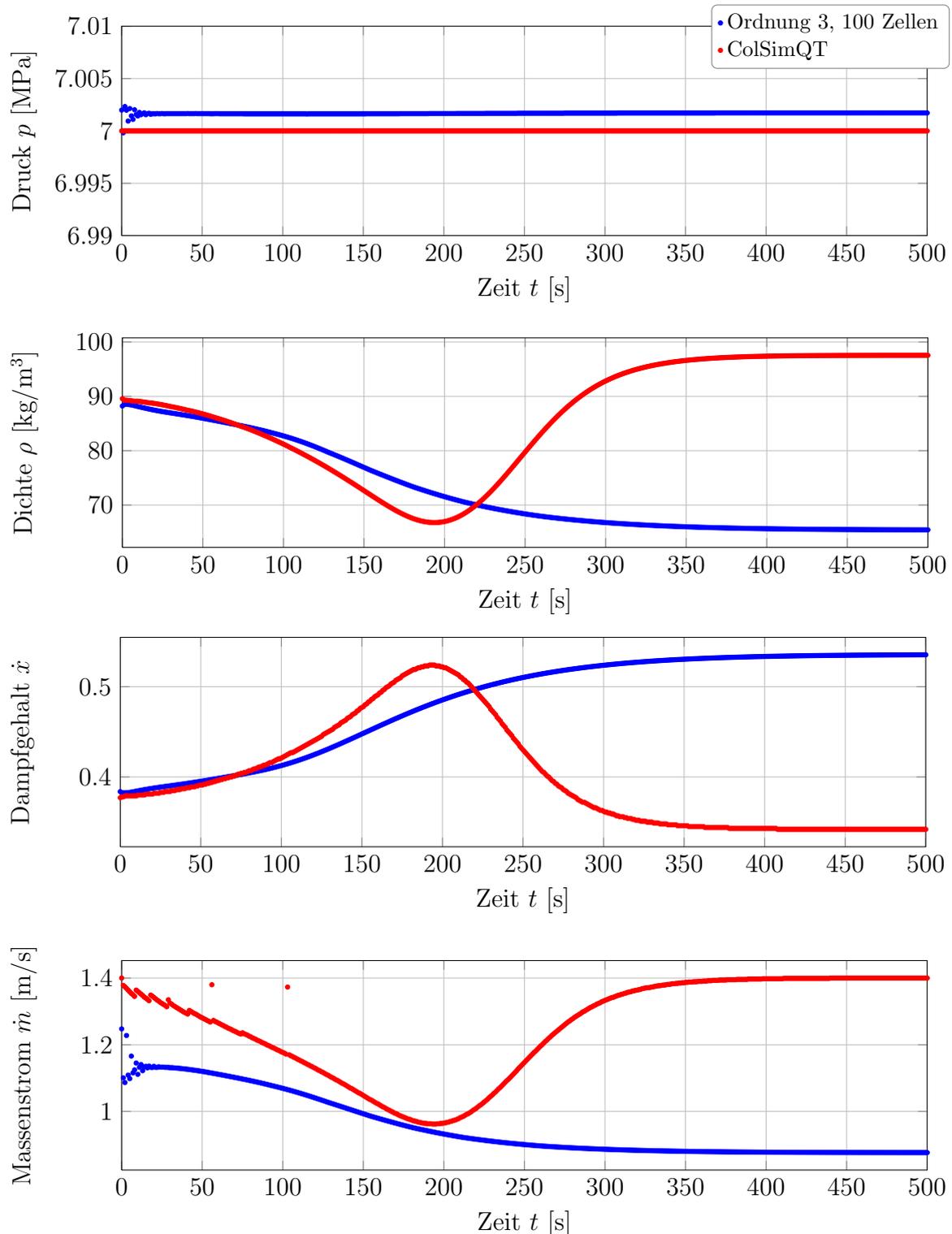


Abbildung 5.6: Simulationsergebnisse des Verdampfungsmodus mit negativem Enthalpiesprung. Abgebildet ist die zeitliche Entwicklung des Drucks am Rohreintritt, sowie der Dichte, des Dampfgehalts und des Massenstroms am Rohraustritt. Der Druck und Massenstroms des Verfahrens 3. Ordnung oszilliert zu Beginn des Schocks.

5.3.3 Überhitzungsmodus

Zur Simulation des Überhitzungsmodus werden die in Tabelle 5.4 festgelegten Werte gewählt. Durch diese Wahl liegt das Wasser im gesamten Rohr zweiphasig vor. Zum Zeitpunkt $t = 1000\text{s}$ liegt der in Abbildung 5.7 dargestellte Status vor.

Parameter		Wert
Rorlänge	ℓ	100 m
Massenstrom am Absorberrohreintritt	\dot{m}	2.0 kg/s
Druck am Absorberrohraustritt	p	70.0 bar
Spez. Enthalpie am Absorberrohreintritt	h	2839.63 kJ/kg
Optische Strahlungsstärke konstant am gesamten Absorberrohr	q_{opt}	8000 W/m

Tabelle 5.4: Parameter zur Simulation des stationären Verlaufs beim Überhitzungsmodus.

Negativer Massenstromsprung

Bezüglich des stationären Verlaufs des Überhitzungsmodus erfolgt ein negativer Massenstromsprung am Absorberrohraustritt um 0.1 kg/s auf 1.3 kg/s. Der Status am Absorberrohreintritt bzw. -austritt nach einer Simulationszeit von 200s wird in Abbildung 5.8 dargestellt.

Positiver Enthalpiesprung

Bezüglich des stationären Verlaufs des Überhitzungsmodus erfolgt ein positiver Enthalpiesprung am Absorberrohraustritt um 40.76 kJ/kg, was einer Temperaturerhöhung von 10 K entspricht. Der Status am Absorberrohreintritt bzw. -austritt nach einer Simulationszeit von 500s wird in Abbildung 5.9 dargestellt.

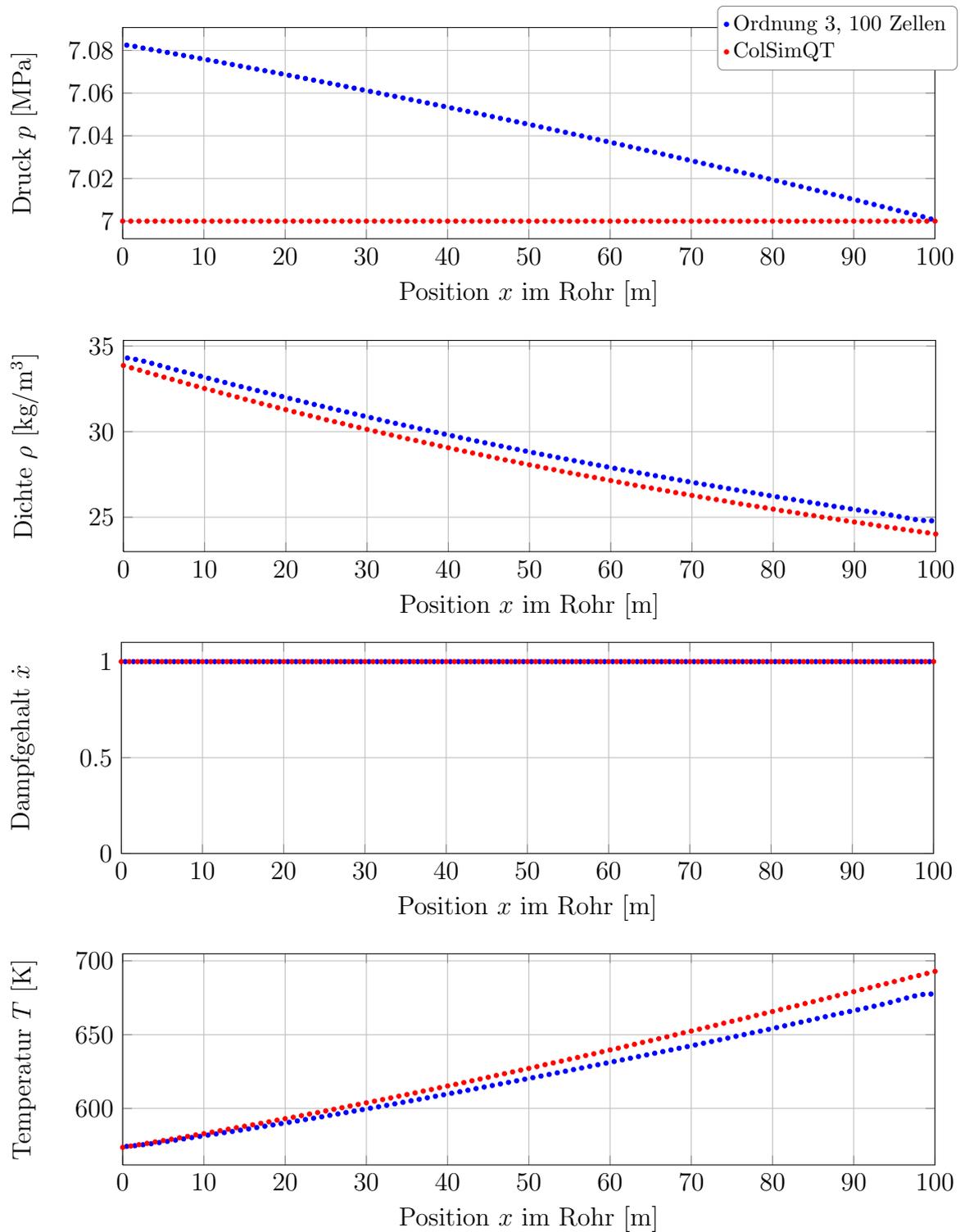


Abbildung 5.7: Simulationsergebnisse des Überhitzungsmodus. Abgebildet ist der örtliche Verlauf des Drucks, der Dichte, des Dampfgehalts und der Temperatur. Ein um ca. 1% unterschiedlicher Druckverlauf lässt sich erkennen.

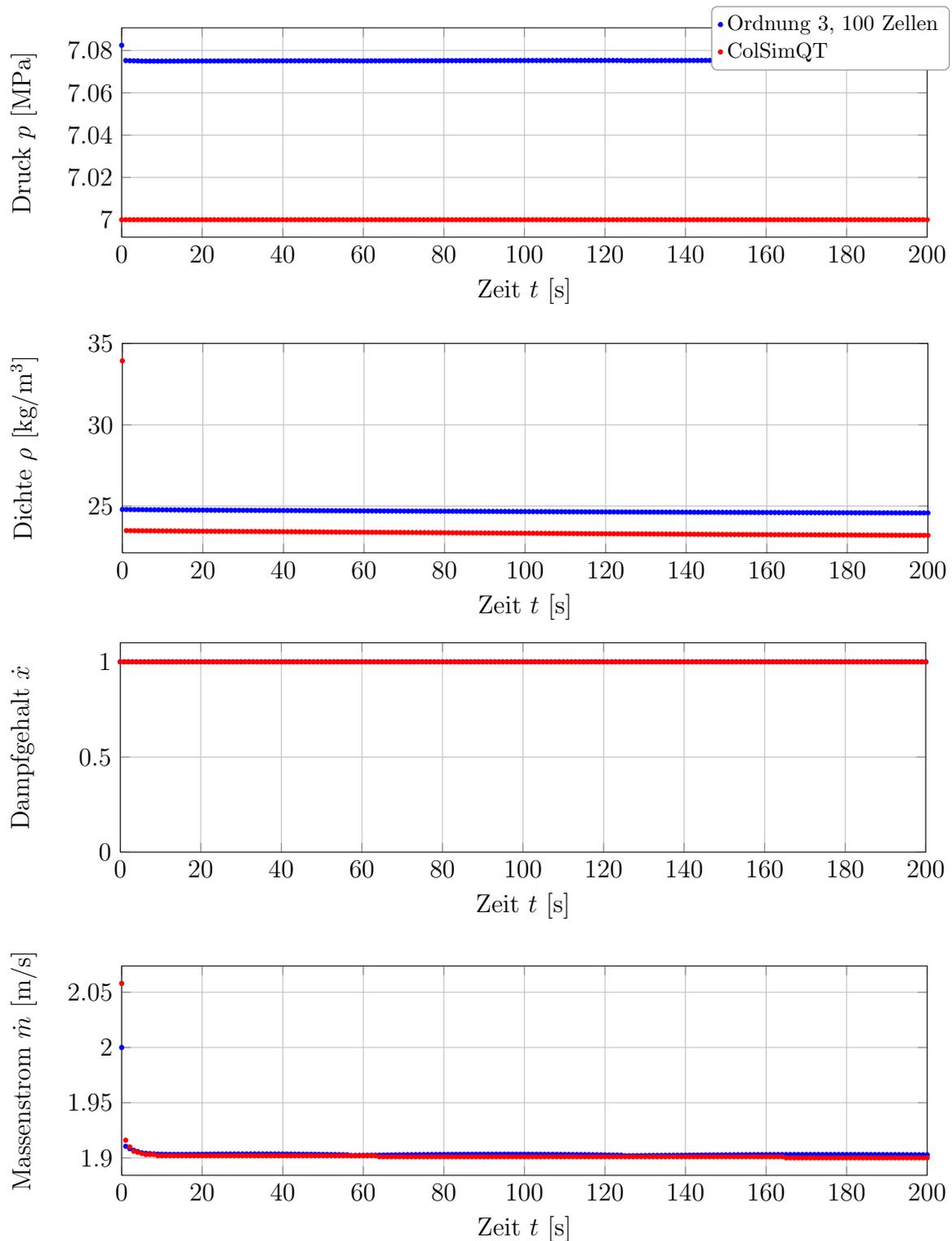


Abbildung 5.8: Simulationsergebnisse des Überhitzungsmodus mit negativem Massenstromsprung. Abgebildet ist die zeitliche Entwicklung des Drucks am Rohreintritt, sowie der Dichte, des Dampfgehalts und des Massenstroms am Rohraustritt. Die Abweichung der Dichte lässt sich durch den unterschiedlichen Druck erklären.

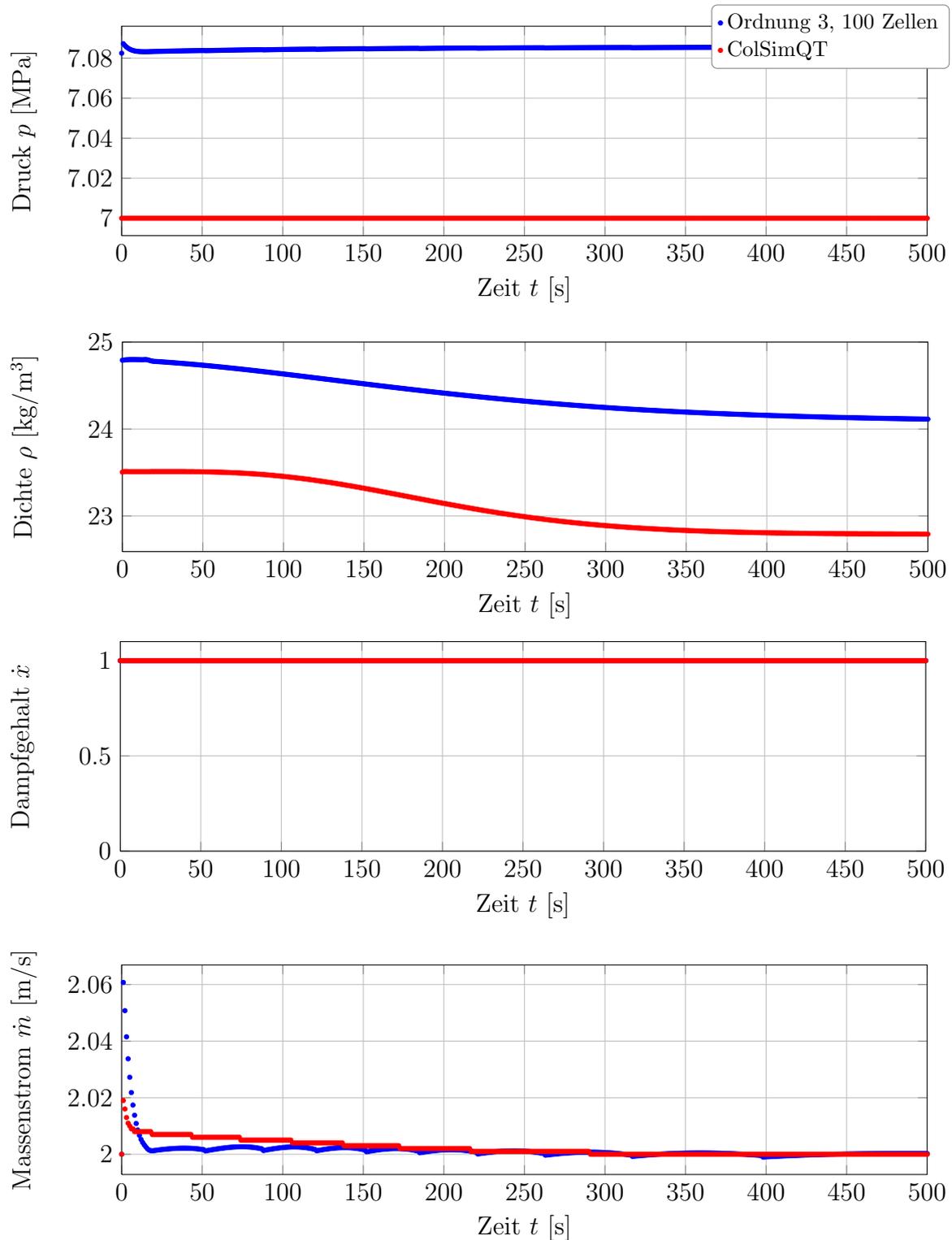


Abbildung 5.9: Simulationsergebnisse des Überhitzungsmodus mit negativem Enthalpiesprung. Abgebildet ist die zeitliche Entwicklung des Drucks am Rohreintritt, sowie der Dichte, des Dampfgehalts und des Massenstroms am Rohraustritt. Die Abweichung der Dichte lässt sich durch den unterschiedlichen Druck erklären.

5.3.4 Kombination einer ein- und zweiphasigen Strömung

Zur Simulation des stationären Verlaufs einer ein- und zweiphasigen Strömung werden die in Tabelle 5.5 festgelegten Werte gewählt. Durch diese Wahl liegt das Wasser am Anfang des Rohres flüssig, in der Mitte zweiphasig und am Ende gasförmig vor. Zum Zeitpunkt $t = 1600\text{s}$ liegt der in Abbildung 5.10 dargestellte Status vor.

Parameter		Wert
Rorlänge	ℓ	1000 m
Massenstrom am Absorberrohreintritt	\dot{m}	3.5 kg/s
Druck am Absorberrohraustritt	p	70.0 bar
Spez. Enthalpie am Absorberrohreintritt	h	944.96 kJ/kg
Optische Strahlungsstärke konstant am gesamten Absorberrohr	q_{opt}	8000 W/m

Tabelle 5.5: Parameter zur Simulation des stationären Verlaufs einer ein- und zweiphasigen Strömung.

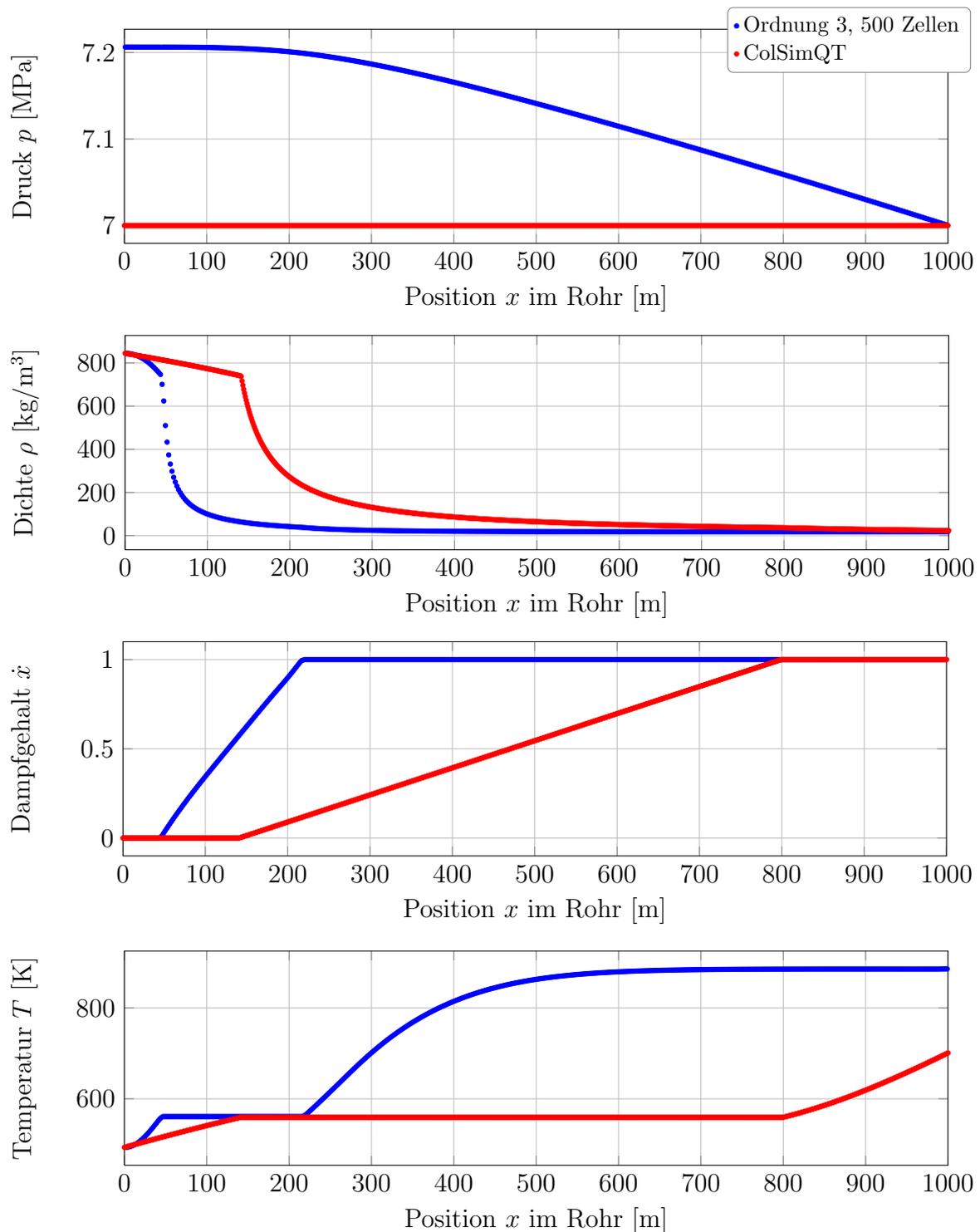


Abbildung 5.10: Simulationsergebnisse der ein- und zweiphasigen Strömung. Abgebildet ist der örtliche Verlauf des Drucks, der Dichte, des Dampfgehalts und der Temperatur. Ein um ca. 3% unterschiedlicher Druckverlauf lässt sich erkennen.

5.4 Bewertung der Simulationsergebnisse

Anhand der Abbildungen 5.1 – 5.10 lässt sich erkennen, dass die Simulationsergebnisse des hergeleiteten Modells qualitativ den Ergebnissen von *ColSimQT* entsprechen. Die quantitativen Unterschiede lassen sich vor allem durch die unterschiedliche Modellierung, die verschiedenen numerischen Verfahren, sowie die Verwendung von unterschiedlichen Dampftafeln zur Zustandsberechnung von Wasser erklären.

Es fällt auf, dass die Ergebnisse der ersten drei Szenarien besser übereinstimmen als die des letzten Szenarios. Während bei den ersten drei Szenarien nur ein kurzes Rohr von 100 m Länge simuliert wird, wird im vierten Szenario ein langes Rohr mit 1000 m Länge simuliert. Da *ColSimQT* den Druck konstant modelliert, jedoch im hergeleiteten Modell Druckverluste berücksichtigt werden, ergibt sich bei der Bestimmung des Druckparameters eine Diskrepanz, die mit der Länge des Rohres größer wird. Bei dem gewählten Szenario mit 1000 m Rohrlänge ergibt sich bereits ein Druckunterschied von 2 bar (72 bar gegenüber 70 bar). Dieser Druckunterschied könnte ausschlaggebend für die Unterschiede in den Ergebnissen sein.

Bei den Simulationsergebnissen von *ColSimQT* fallen einige Störungen in Form von Oszillationen auf, wie beispielsweise der Verlauf des Massenstroms beim Verdampfungszenario mit negativem Enthalpiesprung (siehe Abbildung 5.6). Gem. der FRESDEMO-Studie [19] konvergiert das DLR-Simulationsprogramm *DissDyn* für das Verdampfungszenario mit negativem Drucksprung nicht, während das hergeleitete Modell für dieses Szenario eine Lösung liefert (siehe Abbildung 5.5).

Anhand der untersuchten Szenarien lässt sich zusammenfassend sagen, dass das hergeleitete Modell vergleichbare Ergebnisse gegenüber bisherigen Modellen liefert, das numerische Verfahren stabil arbeitet und in allen untersuchten Szenarien zu einer Lösung konvergiert.

Zusammenfassung und Ausblick

In der vorliegenden Arbeit wurde ein Modell entwickelt welches die Direktverdampfung im Absorberrohr eines solarthermischen Kraftwerks abbildet. Das auf den eindimensionalen Euler-Gleichungen basierende Modell berücksichtigt Druckverluste, Reibungswärme und die solare Einstrahlung.

Zur Herleitung einer numerischen Lösung der nichtkonservativen hyperbolischen Modellgleichungen wurde eine pfadkonservative Methode gewählt. Das PRICE-C Schema wurde sowohl in der ersten als auch in der dritten Ordnung in einer unter C++ geschriebenen Simulationssoftware umgesetzt. Das Programm wurde parallelisiert, so dass die Software auf Multiprozessormaschinen zum Einsatz kommen kann. Die Software hat durchweg stabil Rohrströmungsszenarien simuliert, deren berechneten Lösungen mit den Ergebnissen der Simulationsprogramme des Fraunhofer ISE und des DLR vergleichbar sind.

Das implementierte numerische Verfahren wurde durch das Lösen von akademischen Problemen erfolgreich validiert. Für das entwickelte Rohrströmungsmodell lässt sich bislang keine Aussage darüber treffen, ob es eine reale Rohrströmung korrekt vorher sagen kann, da das Modell im Rahmen der Arbeit nur mit anderen Simulationsprogrammen verglichen wurde. Die Überprüfung durch Messwerte aus solarthermischen Anlagen steht noch aus und sollte in nachfolgenden Arbeiten erfolgen.

In der vorliegenden Arbeit wurde das aufgestellte Gleichungssystem explizit mit der Finiten Volumen Methode numerisch gelöst. Zur Reduzierung der Rechenzeit wäre es denkbar das Gleichungssystem implizit zu lösen, um damit das Verfahren von der CFL Bedingung (und damit von der Schallgeschwindigkeit) zu entkoppeln.

Zur Verbesserung der Genauigkeit lässt sich die getrennte Betrachtung von Flüssig- und Dampfphase nennen, die im Rahmen der Arbeit als homogenes Fluid beschrieben wurde. Durch die getrennte Betrachtung, bewegen sich zwei Phasen mit unterschiedlicher Temperatur und Geschwindigkeit durch das Rohr. Es ist aber zu beachten, dass dieser Vorgang erhöhten Rechenaufwand mit sich ziehen wird, da für jede Phase ein Gleichungssystem als auch eine Übergangsgleichung zwischen den Phasen gelöst werden muss.

Das hergeleitete Rohrströmungsmodell lässt sich in seiner gegenwärtigen Form in einen Kraftwerkssimulationskreislauf einfügen, mit dem Energiebilanzen ermittelt und Regelungsstrategien getestet werden können.

Literaturverzeichnis

- [1] BÖGE, A.: *Vieweg Handbuch Maschinenbau: Grundlagen und Anwendungen der Maschinenbautechnik; mit 441 Tabellen*. Vieweg + Teubner Verlag, 2007
- [2] BIRNBAUM, J. ; ECK, M. ; FICHTNER, M. ; HIRSCH, T. ; PITZ-PAAL, R. ; ZIMMERMANN, G.: A Concept for Future Parabolic Trough Based Solar Thermal Power Plants. In: *Berlin, Germany: 15th International Conference on the Properties of Water and Steam*, 2008
- [3] BLASIUS, H.: Funktionentheoretische methoden in der Hydrodynamik. In: *Z. Math. Phys* 58 (1910), S. 90–110
- [4] BÄRWOLFF, G. ; SEIFERT, G.: *Höhere Mathematik für Naturwissenschaftler und Ingenieure*. Elsevier, Spektrum, Akad. Verl., 2005. – ISBN 3827414369
- [5] BURKHOLDER, F. ; KUTSCHER, C.: Heat loss testing of Schott's 2008 PTR70 parabolic trough receiver / NREL/TP-550-45633. 2009. – Forschungsbericht
- [6] CANESTRELLI, A. ; SIVIGLIA, A. ; DUMBSER, M. ; TORO, E. F.: Well-balanced high-order centred schemes for non-conservative hyperbolic systems. Applications to shallow water equations with fixed and mobile bed. In: *Advances in Water Resources* 32 (2009), Nr. 6, S. 834–844. – ISSN 0309-1708
- [7] CASTRO, M. ; GALLARDO, J. M. ; PARÉS, C.: High order finite volume schemes based on reconstruction of states for solving hyperbolic systems with nonconservative products. Applications to shallow-water systems. In: *Mathematics of Computation* 75 (2006), Nr. 255, S. 1103. – ISSN 0025-5718
- [8] COURANT, R. ; FRIEDRICHS, K. ; LEWY, H.: Über die partiellen Differenzengleichungen der mathematischen Physik. In: *Mathematische Annalen* 100 (1928), Nr. 1, S. 32–74

- [9] DAL MASO, G. ; LEFLOCH, P. G. ; MURAT, F.: Definition and weak stability of nonconservative products. In: *J. Math. Pures Appl., IX. Sér.* 74 (1995), Nr. 6, S. 483–548. – ISSN 0021-7824
- [10] DITTUS, F. W. ; BOELTER, L. M. K.: Heat transfer in automobile radiators of the tubular type. In: *International Communications in Heat and Mass Transfer* 12 (1985), Nr. 1, S. 3–22
- [11] DUMBSER, M. ; KÄSER, M.: Arbitrary high order non-oscillatory finite volume schemes on unstructured meshes for linear hyperbolic systems. In: *Journal of Computational Physics* 221 (2007), Nr. 2, S. 693–723. – ISSN 0021-9991
- [12] DUPONT, J.-F.: *Influence du degré de simplification du model de l'hydrodynamique diphasique sur le comportement dynamic simule d'un generateur de vapeur*, École polytechnique fédérale de Lausanne, Dissertation, 1978
- [13] EHRENBERG, K.: *Solarthermische Kraftwerke (Teil VI der Reihe Regenerative Energien)*. VDI-Gesellschaft Energietechnik, 1997
- [14] GOSSE, L.: A well-balanced flux-vector splitting scheme designed for hyperbolic systems of conservation laws with source terms* 1. In: *Computers & Mathematics with Applications* 39 (2000), Nr. 9-10, S. 135–159. – ISSN 0898-1221
- [15] GOSSE, L.: A well-balanced scheme using non-conservative products designed for hyperbolic systems of conservation laws with source terms. In: *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences* 11 (2001), Nr. 2, S. 339–366. – ISSN 0218-2025
- [16] HAALAND, S. E.: Simple and explicit formulas for the friction factor in turbulent pipe flow. In: *Journal of Fluids Engineering* 105 (1983), Nr. 1, S. 89–90
- [17] HERWIG, H.: *Strömungsmechanik A-Z: Eine systematische Einordnung von Begriffen und Konzepten der Strömungsmechanik*. Vieweg + Teubner Verlag, 2004
- [18] HIRSCH, T.: *Dynamische Systemsimulation und Auslegung des Abscheidesystems für die solare Direktverdampfung in Parabolrinnenkollektoren*. Fortschritt-Berichte VDI, Reihe 6 Energietechnik, Nr. 535, VDI Verlag, 2005

- [19] HIRSCH, T. ; BERGER, M. ; MORIN, G.: Softwarevergleich zur Wärmeträgerregelung, Projekt Fresdemo, Technischer Abschlussbericht zu AP 4.1 / DLR, PSE, Fraunhofer ISE. 2007. – Forschungsbericht
- [20] JIANG, G. S. ; SHU, C. W.: Efficient implementation of weighted ENO schemes. In: *Journal of Computational Physics* 126 (1996), S. 202–228
- [21] LEER, B. van: Towards the ultimate conservative difference scheme. V. A second-order sequel to Godunov’s method. In: *Journal of Computational Physics* 32 (1979), Nr. 1, S. 101–136
- [22] LEVEQUE, R. J.: Balancing Source Terms and Flux Gradients in High-Resolution Godunov Methods: The Quasi-Steady Wave-Propagation Algorithm. In: *Journal of Computational Physics* 146 (1998), Nr. 1, S. 346–365. – ISSN 0021-9991
- [23] LEVEQUE, R. J.: *Finite volume methods for hyperbolic problems*. Cambridge University Press, 2002
- [24] LIPPKE, F.: *Numerische Simulation der Absorberdynamik von Parabolrinnen-Solarkraftwerken mit direkter Dampferzeugung*. Fortschritt-Berichte VDI, Reihe 6 Energieerzeugung, Nr. 307, VDI Verlag, 1994
- [25] LOCKHART, R. W. ; MARTINELLI, R. C.: Proposed correlation of data for isothermal two-phase, two-component flow in pipes. In: *Chem. Eng. Prog.* 45 (1949), Nr. 1, S. 39–48
- [26] MÜLLER-STEINHAGEN, H. ; HECK, K.: A simple friction pressure drop correlation for two-phase flow in pipes. In: *Chemical Engineering and Processing: Process Intensification* 20 (1986), Nr. 6, S. 297–308. – ISSN 0255-2701
- [27] MOHR, M. ; SVOBODA, P. ; UNGER, H.: *Praxis solarthermischer Kraftwerke*. Springer, 1999
- [28] MORIN, G.: *Techno-economic design optimization of solar thermal power plants*, Technische Universität Braunschweig, Dissertation, 2010
- [29] PARÉS, C.: Numerical methods for nonconservative hyperbolic systems: A theoretical framework. In: *SIAM Journal on Numerical Analysis* 44 (2007), Nr. 1, S. 300–321. – ISSN 0036-1429

- [30] PONWEISER, K.: *Numerische Simulation von dynamischen Strömungsvorgängen in netzwerkartigen Rohrkonstruktionen*. Fortschritt-Berichte VDI, Reihe 6 Energietechnik, Nr. 378, VDI Verlag, 1997
- [31] SOD, G. A.: A numerical study of a converging cylindrical shock. In: *Journal of Fluid Mechanics* 83 (1977), Nr. 04, S. 785–794. – ISSN 0022-1120
- [32] SOLAR MILLENNIUM AG: *Funktionsweise eines Parabolrinnen-Kraftwerks mit thermischem Speicher*. Webseite. 2006. – <http://www.solarmillennium.de/deutsch/download/index.html> (abgerufen am 26. Mai 2011)
- [33] SOLAR MILLENNIUM AG: *Die Parabolrinnen-Kraftwerke Andasol 1 bis 3*. Webseite. 2007. – <http://www.solarmillennium.de/deutsch/download/index.html> (abgerufen am 26. Mai 2011)
- [34] STEPHAN, P. ; SCHABER, K. ; STEPHAN, K. ; MAYINGER, F.: *Thermodynamik: Grundlagen und technische Anwendungen Band 1: Einstoffsysteme*. Springer Verlag, 2007
- [35] THOM, W. ; KLEMENT, F.: Im Brennpunkt: Die Parabel. In: *Praxis Schule 5-10* Heft 3 (1997), S. 38–41
- [36] TORO, E. F. ; TITAREV, V. A.: Solution of the generalized Riemann problem for advection–reaction equations. In: *Proceedings of the Royal Society of London. Series A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences* 458 (2002), Nr. 2018, S. 271. – ISSN 1364-5021
- [37] TOUMI, I.: A weak formulation of Roe’s approximate Riemann solver. In: *Journal of computational physics* 102 (1992), Nr. 2, S. 360–373. – ISSN 0021-9991
- [38] WAGNER, W. ; KRUSE, A.: *Properties of water and steam: the industrial standard IAPWS-IF97 for the thermodynamic properties and supplementary equations for other properties: tables based on these equations*. Springer, 1998
- [39] WALTER, H.: *Modellbildung und numerische Simulation von Naturumlaufdampferzeugern*. Fortschritt-Berichte VDI, Reihe 6 Energietechnik, Nr. 457, VDI Verlag, 2001

- [40] ZAHORANSKY, R. A.: *Energietechnik*, 3. Aufl., Vieweg, Wiesbaden, 2007
- [41] ZARZA, E. ; VALENZUELA, L. ; LEÓN, J. ; WEYERS, H. D. ; EICKHOFF, M. ; ECK, M. ; HENNECKE, K.: The DISS project: direct steam generation in parabolic trough systems. Operation and maintenance experience and update on project status. In: *Journal of solar energy engineering* 124 (2002), S. 126

Eigenständigkeitserklärung

Hiermit versichere ich, dass ich diese Diplomarbeit selbständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt habe. Die Stellen meiner Arbeit, die dem Wortlaut oder dem Sinn nach anderen Werken entnommen sind, habe ich in jedem Fall unter Angabe der Quelle als Entlehnung kenntlich gemacht. Dasselbe gilt sinngemäß für Tabellen und Abbildungen. Diese Arbeit hat in dieser oder einer ähnlichen Form noch nicht im Rahmen einer anderen Prüfung vorgelegen.

Aachen, im Mai 2011

Pascal Richter